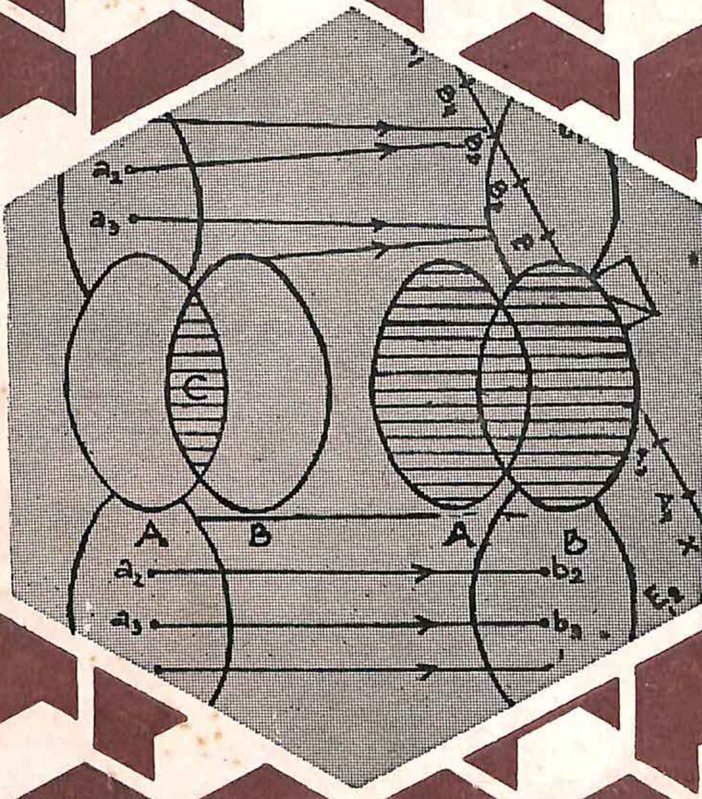
বাস্তব সংখ্যা ও সংহতিতত্ত্ব

প্রদীপ কুমার মজুমদার



পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

বিজ্ঞান পুস্তিকা

বাস্তব সংখ্যা ও সংহতিতত্ত্ব

ডঃ প্রদীপকুমার মজুমদার
এম. এস. সি., পি. এইচ. ডি., এফ. আই. এ. এইচ. পি. এস., গণিতভূষণ

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

BASTAV SANKHA O SANHOTITATTVA
Dr. Pradip Kumar Majumdar

প্রকাশকাল—সেপ্টেম্বর, ১৯৮৪

প্রকাশক :
পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ
(পশ্চিমবঙ্গ সরকারের একটি সংস্থা),
আর্য ম্যানসন, নবমতল,
৬এ, রাজা সুবোধ মল্লিক স্কোয়ার,
কলিকাতা—৭০০ ০১৩

মুদ্রাকর :
কনকপ্রভা বসু,
কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস,
১১, মহেন্দ্র গোস্বামী লেন,
কলিকাতা-৬

মূল্য : দশ টাকা

Published by Shri Dibyendu Hota, Chief Executive Officer, West Bengal State Book Board under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional languages at the University level of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

কিছু কথা

আমার লেখা 'প্রাচীন ভারতে গণিতচর্চা' এবং 'আমাদের দৃষ্টিতে গণিত' বই দু'খানি যাঁরা পড়েছেন তাঁরা হয়তো ভাববেন এই বইখানিতে এত তত্ত্বকথা কেন? হয়তো কেউ কেউ নন্দনতাত্ত্বিক তত্ত্বের দিক থেকে অপূর্ণতা লক্ষ্য ক'রে অসন্তুষ্টও হতে পারেন। আমি কাউকেই তাঁদের এই দুই মনোগত অভিলাষকে দোষীর কাঠগড়ায় তুলে ধরতে চাই না। কারণ দুই চিন্তাধারার মাঝখান ধরে যে ব্যক্তি হাঁটতে চায় তাকে উভয় ক্ষেত্রাধিকারীর বিরাগভাজন হ'তে হবে বৈ-কি। এ থেকে সহজে পরিত্রাণ নেই। হয়তো কেউ কেউ বলবেন মনস্থির ক'রে একদিকে নেমে পড়ে শুধুমাত্র একটি পথে অগ্রসর হ'লেই তো সে দিক রক্ষা পেতো। অন্যদিককার দায়-দায়িত্ব থাকতো না। কিন্তু অন্তরে অন্তরে যে দ্বিচারী তার সমস্যা কি এত দ্রুত সমাধান হয়? এ ব্যাপারে দ্বৈতাদ্বৈতচারীও বলতে পারি নিজেকে। কারণ আমার চোখে গণিত শাস্ত্রের ইতিহাস, গাণিতিক দর্শন এবং বিশুদ্ধ গণিতের তত্ত্ব—গণিতের এই ত্রিধারার মধ্যে সীমারেখা সর্বত্র সুস্পষ্টরূপে উন্মোচিত হয় নি। গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস-চর্চাকারী এবং গণিতের দার্শনিকেরা যুক্তির দাবিকে অগ্রাহ্য করতে পারেন না। তবু তাঁদের চিন্তাধারা মাঝে মাঝে এমন পর্যায়ে উপনীত হয় যে তা থেকে নিষ্কৃতি পাবার জন্য মৌল গাণিতিক তত্ত্বের উপর নির্ভরশীল হতে হয়। অর্থাৎ বহু ক্ষেত্রে প্রত্যক্ষ ও অনুমানকে ভিত্তি ক'রেই গাণিতিক দর্শন ও গণিতের ইতিহাস রচিত হয়। যাই হোক এবার আমি আমার গ্রন্থটি সম্বন্ধে দু'চার কথা লিখছি। গ্রন্থটি মূলতঃ স্নাতকোত্তর শ্রেণীর জন্য লেখা। তবে স্নাতক এবং সাধারণ পাঠকের দিকে দৃষ্টি রেখে যতটা সম্ভব সহজবোধ্যের দিকে নজর দিয়েছি। ফলে অনেক সময় তত্ত্বের আলোচনা দীর্ঘ হয়েছে। বইটি মোট সাতটি অধ্যায়ে বিভক্ত এবং প্রত্যেকটি অধ্যায় যতটা সম্ভব পুঙ্খানুপুঙ্খভাবে আলোচনা করা হয়েছে। তবে সমগ্র বাস্তব রাশি তত্ত্ব কিংবা সংহতিতত্ত্ব এই ক্ষুদ্রকায় মিতাভিলাষ গ্রন্থে খুঁজতে গেলে পাঠক অবশ্যই হতাশ হবেন এবং আমার প্রতি কিঞ্চিৎ অবিচার করবেন। আমার আলোচনা ক্ষেত্র সংকীর্ণ। বাস্তব রাশি তত্ত্ব এবং সংহতিতত্ত্বের বহু বৈশিষ্ট্যের মধ্যে সামান্য কিছু তুলে ধরেছি। কারণ বর্তমানে স্নাতক এবং স্নাতকোত্তর শ্রেণীতে এই তত্ত্বগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়।

ডেডোকিণ্ডের তত্ত্ব এবং এই তত্ত্বের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট বিষয় আধুনিক প্রতীক চিহ্নের সাহায্যে আলোচনা না ক'রে চিরায়ত প্রথায় আলোচনা করেছি। 'আধুনিক' এই শব্দ ব্যবহারে আমার কিঞ্চিৎ অ্যালার্জি আছে। কারণ এর ফলে অযথা তত্ত্বগত দিক থেকে জটিলতা সৃষ্টি করতে পারে। বলা বাহুল্য 'আধুনিকতা'র ধারণা স্বভাবতঃই গতিশীল এবং ধাবমান।

পরিভাষার ব্যাপারে বলা যায় যতটা সম্ভব বিভিন্ন পরিভাষা গ্রন্থ থেকে সাহায্য নিয়েছি। কিছু কিছু ক্ষেত্রে আমি নিজে পরিভাষা তৈরী করেছি। তবে সেগুলি গ্রহণীয় কি বর্জনীয় তা 'কাল' বলে দেবে। একথা ঠিক কিছু কিছু পারিভাষিক শব্দ বিতর্ক সৃষ্টি করতে পারে তবে বিতর্ক সৃষ্টি না করতে পারলে নূতন পারিভাষিক শব্দ তৈরী করা যাবে না।

গ্রন্থটি লেখার কাজে যাঁরা সাহায্য করেছেন তাঁদের মধ্যে আমার বাবা শ্রীসুখদাপ্রসাদ মজুমদার, ছোটভাই শ্রীপ্রণবকুমার মজুমদার, ছোট্ট ভাইঝি পিয়ালী মজুমদার, কন্যা সুদীপ্তা মজুমদার এবং সুরঞ্জন বিশ্বাস অন্যতম। গ্রন্থটি লেখার কাজে অনুপ্রেরণা দেন ডঃ মনীন্দ্র চন্দ্র চাকী, ডঃ বি. কে. লাহিড়ী, ডঃ অসীমকুমার মুখোপাধ্যায়, রবীন সাহা, অনিন্দিতা সাহা প্রমুখ।

আমার সহধর্মিনী শ্রীমতী মণিমালা মজুমদার দৈনন্দিন জীবনের সামাজিক সমস্ত কাজকর্ম থেকে মুক্তি দিয়ে সম্পূর্ণভাবে লেখার কাজে সাহায্য করেছেন।

বইটি প্রকাশনার ব্যাপারে পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদের কর্ণধার অধ্যাপক দিব্যেন্দু হোতা এগিয়ে না এলে এত দ্রুত বইটি প্রকাশ পেতো না। তাছাড়া পর্ষদের অন্যান্য কর্মীরা সম্পূর্ণভাবে সাহায্য করেছেন। এজন্য এঁদের সকলকে ধন্যবাদ জানাই। কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস-এর সকলেই সহযোগিতা করেছেন এজন্য তাঁদের ধন্যবাদ জানাই। বইটি আরও আগে প্রকাশিত হলে আমার দাদামশাই ৺যতীন্দ্রনাথ ভট্টাচার্য কাব্য-ব্যাকরণতীর্থ, স্মৃতি-শাস্ত্রী মশাই খুবই আনন্দিত হতেন। যাঁদের উদ্দেশ্যে গ্রন্থটি লেখা তাঁরা উপকৃত হলে আমার শ্রম সার্থক বলে ভাববো।

১৫ই আগষ্ট ১৯৮৪,
তালপুকুর রোড,
নৈহাটি, ২৪ পরগণা

প্রদীপকুমার মজুমদার

উৎসর্গ

ডঃ বিনয়কুমার লাহিড়ী
এম. এস. সি., পি. এইচ. ডি., ডি. এস. সি.,
এফ. এন. এ. এস. সি., এফ. আই. এম. এ. (ইউ. কে.)-এর
করকমলে

মাষ্টার মশাই,

আপনার অগাধ পাণ্ডিত্য, অসীম তিতিক্ষা, অপরিসীম ধৈর্য, অপরিমেয় কার্যক্ষমতা, স্নেহভাজনদের সৎপথে পরিচালিত করবার জন্যে অপার কষ্টস্বীকার ও উচ্চ চিন্তা—যাঁরা আপনার সংস্পর্শে এসেছেন তাঁদেরই মুগ্ধ করেছে। আপনার অগাধ পাণ্ডিত্য ও গবেষণা-স্পৃহাই আমাকে এ গ্রন্থ লিখতে উৎসাহিত করেছে। আপনার আদর্শই আমার উদ্যমকে সঞ্জীবিত রাখে। আপনার আদর্শই আমার পথ-প্রদর্শক।

আপনার ঋণ এ জীবনে শোধ দেবার নয়, তবুও আপনার প্রতি ভক্তির নিদর্শনস্বরূপ এই ক্ষুদ্র গ্রন্থখানি আপনাকে দিয়ে ধন্য হলাম।

স্নেহধন্য

প্রদীপকুমার মজুমদার

সূচীপত্র

কয়েকটি প্রতীক চিহ্ন

$\Rightarrow$ অনুসৃত হয়।

$\Leftrightarrow$ উভয়দিকে অনুসৃত হয়।

$\in$ অবস্থান করে।

$\exists$ পাওয়া যায়।

$\forall$ প্রত্যেকটির জন্য।

$\cap$ ছেদ।

$\cup$ সমন্বয়।

প্রথম অধ্যায়

মূলদ রাশি এবং অমূলদ রাশির সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত

মূলদ রাশি এবং অমূলদ রাশির ধারণা পূর্বেই ছিল। কিন্তু এর সঠিক সংজ্ঞা ঊনবিংশ শতাব্দীর আগে ছিল কিনা তা নিয়ে ঐতিহাসিকদের মধ্যে যথেষ্ট সন্দেহ আছে। ঊনবিংশ শতাব্দীর শেষপাদে গণিতবিদদের মধ্যে অন্যূন পাঁচজন এ নিয়ে ব্যাপক চিন্তা-ভাবনা করতে থাকেন। এঁরা মূলতঃ বিশ্লেষণের এরিথমেটিকীকরণ (arithmetization of analysis) করার কাজে আত্মনিয়োগ করেন। এই পাঁচজনের মধ্যে একজন হচ্ছেন ফরাসীদেশের বুরগুণ্ডীর এইচ. জি. আর. মেরা (1835—1911 খ্রীঃ)। বাকী চারজন হলেন বার্লিন বিশ্ববিদ্যালয়ের কার্ল ভায়েরষ্ট্রাস (1815—1897 খ্রীঃ), হ্যালের ই. এইচ. হেইনে (1821—1881 খ্রীঃ), জর্জ ক্যাণ্টর (1845—1918 খ্রীঃ), ব্রাউনসিগের জে. ডব্লিউ. আর. ডেডেকিণ্ড (1831—1916 খ্রীঃ)।

1822 খ্রীষ্টাব্দে যোসেফ ফোরিয়ার তাঁর তাপতত্ত্বে এক ধরনের অপেক্ষক এবং সংখ্যার প্রকৃতি নিয়ে চিন্তা করেছিলেন। এবং মার্টিন ওহম (1792—1872 খ্রীঃ) "versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematick" গ্রন্থে বিশ্লেষণের সমুদয়াংশকে এরিথমেটিকে পরিবর্তিত করতে চেষ্টা করেছিলেন। মেরা, ভায়েরষ্ট্রাস, হেইনে, ক্যাণ্টর এবং ডেডেকিণ্ড দীর্ঘ পঞ্চাশ বছর এ নিয়ে ব্যাপক গবেষণা করেছিলেন এবং বহুক্ষেত্রে অস্বস্তিকর চিন্তাধারার মধ্যে কালাতিপাত করেছিলেন। এই অস্বস্তিকর চিন্তার কারণ মূলতঃ দুটি। (এক) অসীম শ্রেণীর গাণিতিক প্রক্রিয়া সম্বন্ধে গণিতবিদদের মধ্যে আস্থার অভাব। (দুই) বাস্তব রাশির সঠিক সংজ্ঞার অভাব। বলতে দ্বিধা নেই শেষেরটি এরিথমেটিকীকরণে বিশেষ কার্যকরী।

প্রখ্যাত গণিতজ্ঞ রীম্যানের ছাত্র হেরম্যান হ্যাঙ্কেল (1839—1873 খ্রীঃ) 1867 খ্রীষ্টাব্দে "Theorie der komplexen Zahlensysteme" গ্রন্থে বলেছেন "The condition for erecting a universal arithmetic is therefore a purely intellectual mathe-

matics, one detached from all perception"। তিনি এই গ্রন্থের অন্যত্র বলেছিলেন বাস্তব রাশিকে "intellectual structure" হিসাবে ভাবলে আমাদের চিন্তা-ভাবনায় অনেক জটিলতা কমে যাবে। প্রকৃতপক্ষে হ্যাঙ্কেলের এই ধারণা সম্পূর্ণ নূতন নয়। বিখ্যাত চেকোশ্লোভাকীয় গণিতজ্ঞ বার্ণাড বোলজানো (1781—1848 খ্রীঃ) 1830-এর দশকে এ নিয়ে ব্যাপক গবেষণা করেছিলেন। তিনি মূলদ রাশির অনুক্রমের সীমা সংক্রান্ত চিন্তাধারার সাহায্য নিয়ে বাস্তব রাশি তত্ত্বের বিকাশ ঘটিয়েছিলেন।[১] কিন্তু যে কোন কারণেই হোক এটি অজ্ঞাত এবং অপ্রকাশিত অবস্থায় থেকে যায়। কিন্তু উইলিয়ম রওয়ান হ্যামিলটন (1805—1865 খ্রীঃ) এ ধরনের চিন্তাধারার কার্যকারিতা উপলব্ধি করেন।

মেরা (Meray) তাঁর চিন্তাধারা প্রকাশ করতে খুবই তৎপর ছিলেন। তিনি 1869 খ্রীষ্টাব্দে একটি প্রবন্ধে বললেন—কৌসি এবং তৎপরবর্তী কালের গণিতবিদদের চিন্তাধারায় বেশ ফাঁক আছে। এরপর অনুমান করলেন "The limit of a sequence as real number"; অবশ্য পরে পরিবর্তিত আকারে রূপ নেয় "a real number as a limit of sequence (of rational numbers)। ইনি অমূলদ রাশির প্রসঙ্গ ব্যতিরেকেই অভিসারিত্বের বর্ণনা দিয়েছিলেন। তাঁর দৃষ্টিভঙ্গি কিছুটা বিস্তৃত করে লিখলে দাঁড়ায়—a convergent sequence determines either a rational number as a limit or a 'fictitious number' as its fictitious limit। এই অপ্রকৃত সংখ্যাসমূহ (fictitious number) সজ্জিত অবস্থায় থাকে এবং একেই অমূলদ রাশি বলে ধরা হয়। মেরার চিন্তাধারায় কিছুটা অস্পষ্টভাব ছিল, কারণ তিনি কখনই বলেন নি অভিসারী অনুক্রম কোন রাশি হয় কিনা।

ভায়েরষ্ট্রাস কলনবিদ্যাকে জ্যামিতি থেকে পৃথক করতে চেয়েছিলেন এবং সংখ্যার ধারণার উপর ভিত্তি করে তিনি এগোচ্ছিলেন। মেরার মতই তিনি বললেন সীমার ধারণা (limit concept) ব্যতিরেকে অমূলদ রাশির সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব। কৌসির ব্যাখ্যায় যে ভ্রান্তি ছিল তা সংশোধনের উদ্দেশ্যে ভায়েরষ্ট্রাস বললেন—অভিসারী অনুক্রমের সীমার অস্তিত্ব দেখাতে গেলে অনুক্রমটি নিজেই সংখ্যা অথবা সীমা হবে। কথাটি একটু ব্যাখ্যা করে বলা

১. Bolzano's Theory of Real numbers—B. Von Rootselaar; Archive for History of Exact Sciences, Vol. 2 (1964—65), pp. 168—180.

দরকার। $\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$ এই শ্রেণীটির সীমা $\frac{1}{3}$ নয় কিন্তু এটি একটি অনুক্রম যা এই শ্রেণীর সঙ্গে জড়িত।

ভায়েরষ্ট্রাস তাঁর এই সব ধারণাগুলি ছাপার আকারে প্রকাশ করেন নি কিন্তু ক্লাসে এ নিয়ে আলোচনা করেছিলেন ফলে তাঁর ছাত্রদের মধ্যে ফার্দিনান্দ লিণ্ডেম্যান, এডোয়ার্ড হেইনে প্রমুখ গণিতবিদরা এ ব্যাপারে জ্ঞাত ছিলেন।

মেরা এবং ভায়েরষ্ট্রাসের সঙ্গে সাদৃশ্য রেখে 1871 খ্রীষ্টাব্দে জর্জ ক্যাণ্টর এরিথমেটিকীকরণের গবেষণায় এগিয়েছিলেন। 1872 খ্রীষ্টাব্দে ক্রেলীর জার্নালে এডোয়ার্ড হেইনে "Die Elemente der Funktionenlehre" নামে একটি প্রবন্ধ প্রকাশ করলেন। এখানে যে তত্ত্বটি প্রকাশিত হয় তা ডেডেকিণ্ড-হেইনের তত্ত্ব নামে পরিচিত। এটির মূল বক্তব্য হচ্ছে—কোন অভিসারী অনুক্রম কোন মূলদরাশিতে অভিসারী না হলে যে রাশিটি এই অনুক্রমটি অভিসারী হবে তাকে অমূলদ রাশি বলা হবে। এরপর Stetigkeit und die Irrationalzahlen গ্রন্থে ডেডেকিণ্ড এই মূলদ ও অমূলদ রাশির সংজ্ঞা ভিন্ন দৃষ্টিকোণ থেকে বিচার করলেন।

1858 খ্রীষ্টাব্দের প্রথম দিকে ডেডেকিণ্ড যখন কলনবিদ্যার উপর বক্তৃতা করছিলেন তখন থেকেই তিনি অমূলদ রাশির সংজ্ঞা নিয়ে ব্যাপক চিন্তা-ভাবনা শুরু করেছিলেন। তিনি বললেন—জ্যামিতি ব্যতিরেকে শুধুমাত্র এরিথমেটিকের সাহায্যে 'সীমার ধারণা' বিকাশ করা যায়। তিনি তাঁর গ্রন্থে প্রশ্ন তুলেছিলেন 'what there is in continuous geometrical magnitude that distinguishes it from the rational number'। গ্যালিলিও এবং লাইবনিজ মনে করতেন নিবিড়ত্বের (density) জন্যই সরলরেখার উপর বিন্দুসমষ্টির অবিচ্ছিন্নভাব বর্তমান। অর্থাৎ যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে তৃতীয় একটি বিন্দু অবস্থান করবে। এই বৈশিষ্ট্য মূলদ রাশির ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য কিন্তু এরা অনন্ত পর্যাপ্তি (continuum) এক্ষেত্রে গঠন করে না। যাই হোক ডেডেকিণ্ড অবশেষে নূতন ধারণার প্রবর্তন করলেন। তিনি বললেন—রেখাংশের অন্তর্গত যে বিন্দুসমূহ তা দুটি শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। একটি বিভাগের প্রত্যেকটি বিন্দু অন্য বিভাগের প্রত্যেকটি বিন্দুর বামপার্শ্বে থাকবে। একটি মাত্র বিন্দুই দুটি শ্রেণীকে বিভক্ত করবে। এরপর ডেডেকিণ্ড বাস্তব রাশির সংজ্ঞা, মূলদ রাশির সংজ্ঞা, অমূলদ রাশির সংজ্ঞা নিয়ে ব্যাপক আলোচনা করেছিলেন।

দ্বিতীয় অধ্যায়

বাস্তব সংখ্যা (Real number)

2·1 মূলদ রাশি (Rational number) ঃ মূলদ রাশির জ্ঞান নানা ধরনের বিস্তৃতিকরণের পরিণামে উদ্ভূত। যে গণনা পদ্ধতির মধ্যে 1, 2, 3,··· প্রভৃতি পূর্ণ সংখ্যার জ্ঞান নিহিত, তাকেই সাধারণতঃ "স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number)" বলা হয়ে থাকে। এই ধরনের সংখ্যা সাধারণতঃ এককের জ্ঞান ও যোগ ক্রিয়ার উপর ভিত্তি ক'রে গঠিত। এগুলির সাহায্যে যোগ ও গুণ এই দুই ধরনের গাণিতিক ক্রিয়া (mathematical operation) করা খুবই সহজ। কিন্তু যদি a এবং b দুটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় এবং $a < b$ হয়, তাহলে $a = b + x$ থেকে কখনই আমরা x-এর মান ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা পাব না। আবার যদি 'a' b-এর গুণিতক না হয়, তাহলে $a = by$ থেকে আমরা y-এর ধনাত্মক পর্ণ সংখ্যা পাব না। যাই হোক, এই ধরনের জটিল অবস্থাকে এড়িয়ে যাবার জন্য নূতন ধরনের সংখ্যার প্রয়োজন হয় এবং ফলস্বরূপ ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ও ভগ্নাংশের উৎপত্তি হয়। অর্থাৎ বিয়োগ ও ভাগের জন্যেই আমরা শূন্য, ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ও ভগ্নাংশের উপস্থাপনা লক্ষ্য করি। সম্মিলিতভাবে এই ধরনের সংখ্যাগুলিকেই সাধারণতঃ "মূলদ রাশি" বলা হয়।

এই মূলদ রাশির কতকগুলি বৈশিষ্ট্য আছে। যেমন ঃ

(1) মূলদ রাশির সাহায্যে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করলে যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল ও ভাগফল সর্বদাই মূলদ রাশি হবে।

(2) যে কোন মূলদ রাশি p/q এই বিধি অনুযায়ী লেখা যায়, কিন্তু মনে রাখা প্রয়োজন p এবং q পারস্পরিক মৌলিক সংখ্যা (prime to each other) হবে এবং $q \neq 0$।

(3) মূলদ রাশি নিম্নলিখিত বিধি মেনে চলে ঃ

(ক) বিনিময় নিয়ম (Commutative law) অর্থাৎ a এবং b যদি দুটি মূলদ রাশি হয়, তাহলে (i) $a + b = b + a$ এবং (ii) $a.b = b.a$ হবে।

(খ) সংযোগ নিয়ম (Associative law) অর্থাৎ a, b এবং c যদি তিনটি মূলদ রাশি হয় তাহলে

(i) $(a+b)+c=a+(b+c)$;

(ii) $a.(b.c)=(a.b).c$ হবে।

(গ) বিতরক নিয়ম (Distributive law):

(i) $(a+b)c\ =ac+bc$

(ii) $c(a+b)=ca+cb.$

(ঘ) একান্বয়ে নিয়ম (law of monotony): যদি $a<b$ হয় তাহলে $a+c<b+c$ এবং $c>o$ হলে $ac<bc$ হবে।

(4) ক্রমিকতা (relation of order): যদি দুটি মূলদ রাশি a এবং b পরস্পরের সমান না হয় তাহলে একটি অপরটির চেয়ে বড় হবে এবং $a>b$ ও $b>c$ হয় তাহলে $a>c$ হবে।

(5) মূলদ রাশির সংহতি নিবিড় (dense) অর্থাৎ দুটি ভিন্ন প্রকারের মূলদ রাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক মূলদ রাশি থাকবে।

(6) মূলদ রাশির সমাহার আর্কিমিডীয় স্বতঃসিদ্ধ মেনে চলে অর্থাৎ a এবং b দুটি মূলদ রাশি এবং $a>b$ হয় তাহলে আমরা একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা n পেতে পারি যার, ফলে $nb>a$ হবে।

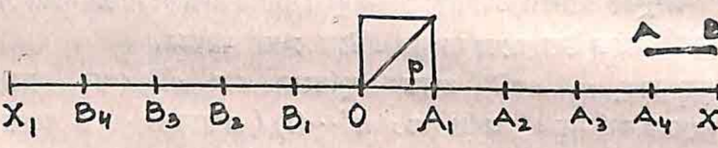
2·2 অমূলদ রাশির উৎপত্তি: অমূলদ রাশির সাধারণ সংজ্ঞা নির্ধারণের পূর্বে একটি সহজ উদাহরণের মাধ্যমে এটিকে বোঝা দরকার।

ধরা যাক, m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং এটি কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গ নয়। অর্থাৎ $m\neq n^2\cdots$(i) (এখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)। এখন আমরা দেখাবো $m\neq p^2/q^2\cdots\cdots$ (ii) (এখানে p এবং q পারস্পরিক মৌলিক সংখ্যা এবং $q\neq 0$)। আরও ভালভাবে বলতে গেলে আমরা বলবো $\sqrt{m}$-কে p/q এই বিধি অনুযায়ী প্রকাশ করা যাবে না। অর্থাৎ $\sqrt{m}$ এমন একটি রাশি যাকে মূলদ রাশি বলা যাবে না। কিন্তু m একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা অতএব এটি বাস্তব সংখ্যা। সুতরাং আমাদের গাণিতিক চিন্তায় একটি দ্বন্দ্ব উপস্থিত হচ্ছে। এই দ্বন্দ্বের অবসানের জন্য একটি নূতন সংখ্যার উদ্ভব হোলো এবং এই নূতন সংখ্যার নামকরণ করা হয় অমূলদ রাশি।

এখন প্রশ্ন উঠতে পারে $\sqrt{m}$ মূলদ রাশি নয় এই ধারণা কি ক'রে সম্ভব ? এর কি কোন সুষ্ঠু প্রমাণ আছে ? হ্যাঁ, নিশ্চয়ই আছে। ধরা যাক,

$\sqrt{m}$ মূলদ রাশি। আমরা দেখাবো $\sqrt{m} \neq p/q$; যেহেতু $\sqrt{m}$ মূলদ রাশি ধরা হয়েছে, অতএব $m = p^2/q^2$ তাহলে $mq^2 = p^2 \cdots$ (iii) কিন্তু $m \neq n^2$ ধরে নিয়েছি [(i) নং দ্রষ্টব্য], অতএব $mq^2 \neq n^2q^2$ অর্থাৎ $mq^2 \neq$ কোন পূর্ণবর্গ সংখ্যা কিন্তু (iii) থেকে দেখতে পাচ্ছি $mq^2 =$ কোন পূর্ণবর্গ সংখ্যা। সুতরাং আমরা একটি পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হচ্ছি। এই পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হবার কারণ—যেহেতু $m = p^2/q^2$ ধরা হয়েছে। সুতরাং $m \neq p^2/q^2$ অর্থাৎ $\sqrt{m} \neq p/q$, অতএব $\sqrt{m}$ মূলদ রাশি নয়, সুতরাং এটিকে অমূলদ রাশি বলতে পারি। তাহলে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে এমন অনেক বাস্তব রাশি আছে যেগুলিকে প্রকাশ করতে গেলে p/q এই বিধি অনুযায়ী লেখা যায় না, তখনই যে নূতন রাশির উদ্ভব হয় তাকেই অমূলদ রাশি বলে ধরে নেওয়া হয়। আরও একটু গভীরে প্রবেশ করলে আমরা বলবো, যদি $x^b = a$ এই সমীকরণে 'a' x এর সম্পূর্ণ b-তম ঘাত না হয় তাহলে যে রাশির উদ্ভব হয় তাকে অমূলদ রাশি বলা হবে।

2·3 মূলদ রাশিসমূহের জ্যামিতিক চিত্র: (Geometrical representation of rational numbers).



$\overline{XX_1}$ একটি সরলরেখার অংশ এবং এই রেখাংশের যে কোন স্থানে একটি বিন্দু O নেওয়া হোলো (চিত্র দ্রষ্টব্য)। এই রেখাংশকে O বিন্দুর দক্ষিণপার্শ্বে বা বামপার্শ্বে ইচ্ছানুরূপ প্রসারিত করা যায়। ধরা যাক $\overline{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য এক একক। এখন O বিন্দুর দক্ষিণপার্শ্বে $\overline{OX}$ রেখাংশের উপর A_1, A_2,······ বিন্দুগুলির এমনভাবে নেওয়া হোলো যাতে $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ ······ রেখাংশগুলির দৈর্ঘ্য একক মাপের হয় অর্থাৎ $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots\ldots = AB$। তাহলে স্বভাবতই বলা যায় A_1, A_2, A_3, ... বিন্দুগুলি যথাক্রমে অখণ্ড সংখ্যা (এখানে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) 1, 2, 3,........' এর চিত্ররূপ ধরা যেতে পারে। আমরা O

বিন্দুর বামপার্শ্বে $\overline{OX_1}$ রেখাংশের উপর $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots$ বিন্দুগুলি এমনভাবে নিলাম যাতে $\overline{OB_1}, \overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}\ldots\ldots$ রেখাংশগুলির দৈর্ঘ্য একক মাপের হয়। অর্থাৎ $\overline{AB}$ রেখাংশের সমান হয়। অর্থাৎ

$$\overline{OB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \ldots\ldots\ldots = AB\text{।}$$

তাহলে ঠিক আগের মতই আমরা এখানে বলতে পারি $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে অখণ্ড সংখ্যা (এখানে ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা) $-1, -2, -3, \ldots\ldots$' এর চিত্ররূপ ধরা যেতে পারে।

$\overline{OA_1}$ রেখাংশটিকে সমান q অংশে ভাগ করা হোলো। এখন O বিন্দুর দক্ষিণপার্শ্বে p-তম ভাগের শেষ বিন্দু P হয় তাহলে P মূলদরাশি p/q (এখানে স্বাভাবিকভাবেই বলা যায় $p < q$) 'এর চিত্র। ঠিক অনুরূপ ভাবে $\overline{A_nA_{n+1}}$ রেখাংশটিকে q সমানভাগে ভাগ করে p-তম ভাগের শেষবিন্দু P_n নিলে P_n মূলদ রাশি $n + p/q = p_1/q, (p_1 > q)$ 'এর চিত্র।

এইভাবে আমরা যে কোন মূলদ রাশির চিত্র পাবো। যাই হোক, আমরা এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলতে পারি $\overline{XOX_1}$ রেখাংশটির প্রত্যেকটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মূলদ রাশির প্রতিষঙ্গী (corresponding) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু আছে। মূলদ রাশিসমূহের নিবিড়ত্বের ও ক্রমিকত্বের মতো এই বিন্দুগুলির নিবিড়ত্ব ও ক্রমিকত্ব আছে। $\overline{XX_1}$ রেখাংশের অন্তর্গত দুটি মূলদ রাশির প্রতিষঙ্গী বিন্দুর অন্তবর্তী দূরত্বকে ইচ্ছানুরূপ সংখ্যক সমানভাগে বিভক্ত করে আমরা যে বিন্দুগুলি পাই তাদের প্রত্যেকটি কোন মূলদ রাশির চিত্ররূপ। সুতরাং এ থেকে আমরা বলতে পারি মূলদ রাশির চিত্রের বিন্দুসমষ্টি নিবিড়।

এ কথা সত্য যে মূলদ রাশির চিত্ররূপ বিন্দুসমষ্টি নিবিড় হলেও $\overline{XX}$ রেখাংশের উপর এমন অনেক বিন্দু পাওয়া যায় যেগুলি কোন মূলদ রাশির চিত্ররূপ নয়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $\overline{OA_1}$ রেখাংশের উপর $\overline{OA_1}$ বাহুর সমান করে একটি বর্গক্ষেত্র OA_1CD আঁকা হোলো। এবং $\overline{OC}$ এই বর্গক্ষেত্রটির কর্ণ। $\overline{XX_1}$ রেখাংশের O বিন্দু থেকে Q এমন একটি বিন্দু নেওয়া হোলো যাতে $\overline{OQ} = \overline{OC}$ হয়, তাহলে Q কোন মূলদ রাশির চিত্ররূপ নয়। এটি অমূলদ রাশি $\sqrt{2}$-এর চিত্ররূপ। (Q বিন্দুটি চিত্রে দেখানো হয় নি)।

এতক্ষণ পর্যন্ত আমরা মূলদ ও অমূলদ রাশি সম্পর্কে আলোচনা করলাম। এদিয়ে হয়তো সহজ সহজ যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি গাণিতিক

ক্রিয়া সম্ভব। কিন্তু মূলদ রাশির ঘাত (power) যদি ভগ্নাংশ হয় তাহলে চার প্রকার গাণিতিক ক্রিয়া হৃদয়ঙ্গম করা বেশ কষ্টসাধ্য ব্যাপার এবং যার ফলে আরও ভালভাবে এবং ব্যাপকভাবে মূলদ ও অমূলদ রাশির সংজ্ঞা নিরূপণের দরকার হয়ে পড়ে। এই নূতন ধরনের সংজ্ঞা নিরূপণের জন্য ভায়েরষ্ট্রাস, ক্যাণ্টর, ডেডেকিণ্ড, হেইনে প্রমুখ গণিতজ্ঞরা সচেষ্ট হন। আমরা তাহলে এক এক করে মূলদ এবং অমূলদ রাশির তত্ত্ব ও তার ব্যবহারিক প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করছি।

2·4 মূলদ রাশির বিভাগীকরণ : ডেডেকিণ্ডের মূলদ ও অমূলদ রাশির সংজ্ঞা বিভাগীকরণের উপর ভিত্তি করে রচিত। ডেডেকিণ্ড সমস্ত মূলদ রাশিগুলিকে (যে রাশিগুলিকে p/q এই বিধিতে প্রকাশ করা হয়ে থাকে) 'L' এবং 'R' এই দুটি বিভাগে ভাগ করেছেন এবং এই বিভাগীকরণ নিম্নলিখিত সর্তসমূহ পালন করে চলে :

(i) প্রত্যেকটি বিভাগের অস্তিত্ব থাকবে অর্থাৎ সমস্ত রাশিগুলি যে কোন একটি বিভাগে অবস্থান করবে না।

(ii) প্রতিটি রাশিই কোন না কোন একটি বিভাগে অবস্থান করবে অর্থাৎ বলা যায় যে কোন রাশি হয় L বিভাগে না হয় R বিভাগে অবস্থান করবে।

(iii) L বিভাগের প্রত্যেকটি রাশি 'R' বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির চেয়ে ছোট।

এখন L বিভাগকে নিম্নবিভাগ এবং R বিভাগকে উচ্চ বিভাগ বলে ধরা হয়। (L, R) এই বিভাগীকরণকে মূলদ রাশির বিভাগীকরণ বলা হয়।

2·5 তিন প্রকারের বিভাগীকরণ : উপরেল্লেখিত (L, R) বিভাগীকরণ আমাদের তিনটি সিদ্ধান্তে উপনীত হতে সাহায্য করে। যথা :

(ক) L বিভাগে কোন সর্বোচ্চ সংখ্যা থাকবে না কিন্তু R বিভাগে সর্বনিম্ন সংখ্যা থাকতে পারে।

ব্যাখ্যা : একটি উদাহরণের সাহায্যে এর ব্যাখ্যা দেওয়া ভাল।

3 থেকে যে সমস্ত রাশি ছোট সেগুলি L বিভাগে লওয়া যাক এবং 3 থেকে বড় অথবা সমান সেগুলি R বিভাগে লওয়া যাক। আমরা প্রমাণ করবো L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই কিন্তু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি 3 আছে।

প্রমাণ ঃ আমরা প্রথমেই দেখাবো (L, R) একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ অর্থাৎ আমরা দেখাবো 2·4 'এর সর্ত তিনটি এক্ষেত্রে মেনে চলছে।

মূলদ রাশি $1 \in L$ ($\in$ এর অর্থ অবস্থান করে) কারণ $1 < 3$ এবং L বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয়েছে যাদের মান 3 থেকে ছোট। মূলদ রাশি $15/2 \in R$ কারণ $\frac{15}{2} > 3$ এবং R বিভাগে 3 'এর সমান অথবা বড় মূলদ রাশিগুলি রাখা হয়েছে।

সুতরাং আমরা দেখতে পেলাম প্রত্যেকটি বিভাগের অস্তিত্ব আছে অর্থাৎ 2·4 'এর প্রথম সর্তটি সিদ্ধ হচ্ছে।

এবার আমরা দেখাবো প্রত্যেকটি রাশিই কোন না কোন বিভাগে অবস্থান করবে। এখন ধরা যাক γ একটি মূলদরাশি তাহলে γ রাশিটি নিম্নলিখিত তিনটি সর্তের যে কোন একটি সর্ত মেনে চলবে।

(i) $\gamma < 3$ তাহলে $\gamma \in L$.

(ii) $\gamma = 3$ তাহলে $\gamma \in R$.

(iii) $\gamma > 3$ তাহলে $\gamma \in R$.

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি, γ মূলদ রাশিটি হয় L বিভাগে না হয় R বিভাগে অবস্থান করছে। অর্থাৎ এ থেকে বলা যেতে পারে—প্রত্যেকটি রাশিই কোন না কোন বিভাগে অবস্থান করবে।

অতএব 2·4 এর দ্বিতীয় সর্তটি সিদ্ধ হচ্ছে।

সর্বশেষ আমাদের দেখাতে হবে L বিভাগের প্রত্যেকটি রাশিই R বিভাগের প্রত্যেকটি রাশি অপেক্ষা ছোট। এই সর্তটি দেখাতে গেলে আমরা যে কোন দুটি মূলদ রাশি x এবং y লই এবং $x \in L$ এবং $y \in R$ হয়।

আমাদের প্রমাণ করতে হবে $x < y \cdots$ (i)

ধরা যাক $x \nless y$ তাহলে নিশ্চয়ই $x \geq y$ হবে। কিন্তু $x = y$ অসম্ভব কারণ একই রাশি উভয় বিভাগ L এবং R এ অবস্থান করতে পারে না। সুতরাং $x \neq y$; তাহলে $x > y$ হবে। যেহেতু $y \in R$ $\therefore$ $y \geq 3$ এবং $x > y \geq 3 \Rightarrow x > 3$ $\cdots$ (ii)

($\Rightarrow$ এর অর্থ এথেকে পাওয়া যায় বা অনুসৃত হয়) কিন্তু আমরা x'কে L বিভাগে লওয়ার জন্য x সর্বদাই 3 অপেক্ষা ছোট হবে। আবার (ii) এ দেখছি $x > 3$; অতএব আমরা পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্তে

উপনীত হচ্ছি। এটি হওয়ার কারণ আমরা $x > y$ ধরেছি। অতএব $x \ngtr y$ অর্থাৎ আমরা বলতে পারি $x \ngtr y$ সুতরাং $x < y$। এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা বলতে পারি L বিভাগের প্রত্যেকটি রাশিই R বিভাগের প্রত্যেকটি রাশি অপেক্ষা ছোট। প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় ঘটনা থেকে স্পষ্টই বলা যায় (L, R) একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ। তাছাড়াও আমরা লক্ষ্য করলাম R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি 3 অবস্থান করছে। সুতরাং আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই কিন্তু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি অবস্থান করছে।

(খ) L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি অবস্থান করে কিন্তু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি নেই।

ব্যাখ্যা ঃ 5 'এর থেকে যে সব রাশি ছোট অথবা সমান সেগুলি L বিভাগে লওয়া যাক এবং 5 'এর থেকে যে সব রাশি বড় সেগুলি R বিভাগে লওয়া যাক। আমাদের প্রমাণ করতে হবে L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি 5 অবস্থান করে। এটি প্রমাণ করতে গেলে আমরা প্রথমে দেখাবো (L, R) একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ।

(ক) 'তে যেমনভাবে প্রমাণ করা হয়েছে যে (L, R) একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ। ঠিক অনুরূপভাবে এখানে দেখানো সম্ভব যে (L, R) একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ। এবং আরও প্রমাণ করা সম্ভব L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি 5 অবস্থান করে কিন্তু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি নেই।

(গ) L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই এবং R বিভাগেও সর্বনিম্ন রাশি নেই।

ব্যাখ্যা ঃ L বিভাগে ঋণাত্মক রাশি মূলদ রাশি, শূন্য ও সেই সমস্ত মূলদ রাশি রাখা হয় যাদের বর্গ 2 অপেক্ষা ছোট। এবং R বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয় যাদের বর্গ 2 অপেক্ষা বড়। আমরা প্রমাণ করবো L বিভাগে সর্বোচ্চ মূলদ রাশি (যে গুলি p/q এই বিধিতে প্রকাশ করা হয়ে থাকে) নেই এবং R বিভাগে সর্বনিম্ন মূলদ রাশি নেই। এটিকে প্রমাণ করতে গেলে প্রথমে দেখাতে হবে যে (L, R) একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ, তারপর মূল অংশটি প্রমাণ করা হবে। (L, R) 'কে মূলদ রাশির বিভাগীকরণ বলতে গেলে আমাদের দেখাতে হবে

($গ_1$) প্রতিটি বিভাগের অস্তিত্ব বর্তমান।

($গ_2$) প্রতিটি মূলদ রাশি কোন না কোন বিভাগে অবস্থান করবে।

(গ$_3$) L বিভাগের প্রতিটি রাশি R বিভাগের প্রতিটি রাশি অপেক্ষা ছোট।

এখন (গ$_1$), (গ$_2$) এবং (গ$_3$) শর্তগুলি পরপর প্রমাণ করা হচ্ছে।

(গ$_1$) $-7 \in L$ যেহেতু $-7 < 2^2$

এবং $9 \in R$ যেহেতু $9 > 2^2$

সুতরাং L এবং R উভয় বিভাগের অস্তিত্ব বর্তমান।

(গ$_2$) এবং (গ$_3$) সর্ত দুটি প্রমাণ করার আগে আমরা প্রমাণ করবো "এমন কোন মূলদরাশি নেই যার বর্গ 2 'এর সমান।" দেখা যাক এটি প্রমাণ করা যায় কিনা।

ধরা যাক p/q এমন একটি মূলদরাশি যার বর্গ 2 এর সমান (মনে রাখা প্রয়োজন যে p এবং q পারস্পরিক মৌলিক সংখ্যা এবং $q \neq 0$) অর্থাৎ $p^2/q^2 = 2$. তাহলে $p^2 = 2q^2$ ... (i)

সুতরাং p^2 একটি যুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা (even integer) অর্থাৎ p একটি যুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা। ধরা যাক $p = 2k$ .... (ii) (এখানে k একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা) তাহলে (i) 'এ মান বসিয়ে আমরা পাই $(2k)^2 = 2q^2$ অথবা $4k^2 = 2q^2$ বা $2k^2 = q^2$ অর্থাৎ এক্ষেত্রেও দেখছি q একটি যুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা। ধরা যাক $q = 2l$ .... (iii) (এখানে l একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা) সুতরাং (ii) এবং (iii) থেকে আমরা বলতে পারি p এবং q এর মধ্যে একটি সাধারণ উৎপাদক নিশ্চয়ই আছে। কিন্তু তাহলে আমাদের পূর্ব সিদ্ধান্ত p এবং q এর মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক নেই এই ধারণার বিপরীত সিদ্ধান্তে উপনীত হচ্ছি। অর্থাৎ স্ববিরোধী সিদ্ধান্ত আমরা দেখতে পাচ্ছি। এবং এই সিদ্ধান্তে আসার কারণ—যেহেতু আমরা $p^2/q^2 = 2$ ধরেছি। এই ধরে নেওয়া সর্তটি ঠিক নয় অর্থাৎ $p^2/q^2 \neq 2$। সুতরাং আমরা দেখাতে পেরেছি—এমন কোন মূলদরাশি নেই যার বর্গ 2 এর সমান হবে।

এবার (গ$_2$) 'এর মূল প্রমাণে আসা যাক। অর্থাৎ প্রতিটি রাশি কোন না কোন বিভাগে অবস্থান করবে। আমরা ইচ্ছানুরূপ যে একটি মূলদ রাশি x নিলাম তাহলে

(গ^1) যদি x ঋণাত্মক রাশি হয় তাহলে $x \in L$

(গ^2) যদি এটি শূন্য হয় তাহলে এটি L বিভাগে অবস্থান করবে।

(গ³) যদি এটি ধনাত্মক হয় কিন্তু এটির বর্গ 2 'এর থেকে ছোট হয় তাহলে এটি L বিভাগে অবস্থান করবে।

(গ⁴) যদি এটি ধনাত্মক হয় কিন্তু এটির বর্গ 2 'এর থেকে বড় হয় তাহলে এটি R বিভাগে অবস্থান করবে।

(গ¹), (গ²), (গ³) এবং (গ⁴) থেকে স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে প্রতিটি রাশিই হয় L বিভাগে না হয় R বিভাগে অবস্থান করবে।

সুতরাং আমরা (গ₂) 'এর সর্তটি প্রমাণ করতে সমর্থ হলাম। (গ₃) ধরা যাক x একটি মূলদ রাশি যেটি L বিভাগে অবস্থান করে এবং y একটি ভিন্ন মূলদরাশি যেটি R বিভাগে অবস্থান করে। তাহলে আমরা তিনটি সম্ভাবনার সম্মুখীন হবো।

(i) x ঋণাত্মক মূলদরাশি হতে পারে।

(ii) x শূন্য হতে পারে

(iii) x ধনাত্মক মূলদ রাশি হতে পারে কিন্তু $x^2 < 2$.

যেহেতু $y \in R$ সুতরাং $y > 0$ এবং $y^2 > 2$। এখন $x < 0$ হলে স্বভাবতই $x < y$ হবে।

আবার যদি $x = 0$ হয় তাহলেও $x < y$ হবে।

কিন্তু $x^2 > 0$ এবং $x^2 < 2$ হয় তাহলেও $x < y$ হবে।

ধরা যাক $x \nless y$ তাহলে $x \geq y$ হবে অর্থাৎ $x^2 \geq y^2$ (যেহেতু x এবং y দুটিই ধনাত্মক মূলদরাশি)

$\therefore \quad y^2 \leq x^2 < 2$ বা $y^2 < 2 \quad \cdots \quad (1)$

কিন্তু $y \in R$ অতএব $y^2 > 2 \quad \cdots \quad (2)$

সুতরাং (1) এবং (2) থেকে পরস্পর বিরোধী অসংগত সিদ্ধান্তে উপনীত হচ্ছি। অতএব $x \ngeq y$ অর্থাৎ $x < y$.

এ থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে L বিভাগের প্রত্যেকটি রাশিই R বিভাগের প্রত্যেকটি রাশি অপেক্ষা ছোট।

অতএব (গ₃) সর্তটি সিদ্ধ হোলো।

তাহলে (গ₁), (গ₂) এবং (গ₃) থেকে আমরা বলতে পারি (L, R) একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ।

এইবার আমরা (গ) 'এর মূল সর্তটি প্রমাণ করবো। অর্থাৎ এটি প্রমাণ করতে গেলে দেখাতে হবে

(i) L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই।

(ii) R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি নেই।

(i) ধরা যাক L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি r আছে। আমরা দেখাবো এ অনুমান সত্য নয়।

যেহেতু $r \in \mathrm{L}$ এবং সর্বোচ্চ রাশি, অতএব $r^2 < 2$,

অথবা $2-r^2$ ধনাত্মক······ (3)

এবার ভিন্ন একটি মূলদ রাশি k ধরা যাক এবং

$k=\dfrac{4+3r}{3+2r}$· ধরা হোলো। স্বাভাবিকভাবেই বলা যায় $k>0$.

$$\text{এখন}\quad k-r=\frac{4+3r}{3+2r}-r=\frac{4+3r-3r-2r^2}{3+2r}.$$

$$=\frac{2(2-r^2)}{3+2r}>0\ [\ (3)\ \text{এর সাহায্যে}\ ]$$

অতএব $k-r>0$ ··· (4)

$$\text{আবার}\quad k^2-2=\left(\frac{4+3r}{3+2r}\right)^2-2$$

$$=\frac{16+24r+9r^2-18-24r-8r^2}{(3+2r)^2}.$$

$$=\frac{r^2-2}{(3+2r)^2}<0\ [\ (3)\ \text{এর সাহায্যে}\ ]$$

অতএব $k^2<2$ ··· (5)

তাহলে আমরা দেখতে পাচ্ছি k একটি মূলদ রাশি এবং $k>0$ কিন্তু $k^2<2$। সুতরাং আমরা এমন একটি মূলদ রাশি k'র সন্ধান পেলাম যেটি সর্বোচ্চ সংখ্যা r অপেক্ষাও বড়। সুতরাং আমরা আবার পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হচ্ছি। এবং এই বিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হবার কারণ L বিভাগে সর্বোচ্চ মূলদ রাশি r অবস্থান করে ধরে নেওয়া হয়েছে। অতএব উক্তিটি ভ্রান্ত। অর্থাৎ আমরা বলবো L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই।

(ii) এবার আমরা প্রমাণ করবো R বিভাগে সর্বনিম্ন মূলদ রাশি নেই। ধরা যাক R বিভাগে সর্বনিম্নরাশি s আছে। আমরা দেখাবো এটি অসম্ভব।

$$s \in \mathrm{R} \Rightarrow s > 0 \text{ এবং } s^2 > 2.$$

$$\Rightarrow s^2 - 2 > 0 \quad \cdots \quad (6)$$

এবার আমরা ভিন্ন একটি মূলদ রাশি t লই এবং

$$t = \frac{4+3s}{3+2s} \text{ ধরি।}$$

$$\text{এখন } t - s = \frac{4+3s}{3+2s} - s$$

$$= \frac{4+3s-3s-2s^2}{3+2s}$$

$$= \frac{2(2-s^2)}{3+2s} < 0 \text{ [(6) এর সাহায্যে]}$$

$$\therefore \quad t < s.$$

$$\text{আবার } t^2 - 2 = \left(\frac{4+3s}{3+2s}\right)^2 - 2$$

$$= \frac{s^3 - 2}{(3+2s)^2} > 0 \text{ [(6) এর সাহায্যে]}$$

$$\therefore \quad t^2 > 2 \Rightarrow t \in \mathrm{R}.$$

তাহলে আমরা এখন একটি মূলদ রাশি t পাচ্ছি যেটি সর্বনিম্ন মূলদ রাশি s থেকে ছোট কিন্তু দেখা যাচ্ছে $t \in \mathrm{R}$। অর্থাৎ আমরা একটি স্ববিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হচ্ছি। অতএব R বিভাগে অবস্থিত মূলদ রাশি s সর্বনিম্ন এ ধারনা ভ্রান্ত। অর্থাৎ R বিভাগে কোন সর্বনিম্ন মূলদ রাশি নেই।

উপরেল্লেখিত (ক), (খ) এবং (গ) 'এর আলোচনা থেকে স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে আমরা তিন ধরনের মূলদ রাশির বিভাগীকরণ (L, R) পাচ্ছি।

(1) L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি অবস্থান করে কিন্তু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি অবস্থান করে না।

(2) L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই কিন্তু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি অবস্থান করে।

(3) L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই এবং R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি নেই।

স্বভাবতই মনে প্রশ্ন জাগতে পারে—এমন একটি বিভাগীকরণ পাওয়া যাবে কি যার ফলে একই সময় L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি অবস্থান করবে এবং R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি অবস্থান করবে? আমরা বলবো এ ধরনের কোন গাণিতিক ধারণা থাকা একেবারেই অসম্ভব। দেখা যাক কি হয়।

ধরা যাক L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি r আছে এবং ঐ একই সময়ে R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি s আছে। আমরা দেখাবো এই ধারণা ভ্রান্ত।

আমরা নূতন একটি মূলদ রাশি $t=\dfrac{s+t}{2}$ ধরি

এখন, $$t-r=\frac{r+s}{2}-r=\frac{s-r}{2}>0 \text{ (যেহেতু } s\in\text{R)}$$

$$\therefore \quad t>r \text{ এবং } t\notin \text{L} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার $$t-s=\frac{r+s}{2}-s=\frac{r-s}{2}<0$$

$$\therefore \quad t<s \text{ এবং } t\notin \text{R} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) থেকে বলতে পারি t কোন বিভাগেই অবস্থান করছে না। সুতরাং (L, R) ’কে একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ বলা যাবে না। অর্থাৎ এ থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি একই সময়ে L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি থাকবে না এবং R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি থাকবে না।

2·6 নিম্নবিভাগ গঠন: দেখা গিয়েছে গণিতবিদরা (L, R) এই মূলদ রাশির বিভাগীকরণের L বিভাগকে নূতন ভাবে সংজ্ঞায়িত করেছেন। কেন নূতন সংজ্ঞা দেওয়া হোলো তা নিয়ে বিস্তৃত আলোচনার জায়গা এখানে নয়, তবে এটুকু বলা যায়—এই নূতন সংজ্ঞার সাহায্যে দুটি বাস্তব রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ প্রভৃতি গাণিতিক ক্রিয়া সহজেই সংজ্ঞায়িত করা যায়। দেখা যাক L বিভাগের নূতন সংজ্ঞা কি ভাবে দেওয়া হয়েছে।

যে কোন মূলদ রাশির সংহতি (set) কোন বিভাগীকরণের নিম্ন বিভাগ গঠন করতে পারে যদি

(ক) সমস্ত মূলদ রাশি এই নিম্ন বিভাগে না থাকে।

(খ) এই নিম্ন বিভাগে কোন সর্বোচ্চ রাশি না থাকে।

(গ) যে কোন মূলদ রাশি এই বিভাগের যে কোন রাশি অপেক্ষা ছোট হলে এই বিভাগেই অবস্থান করবে।

এখন যে সমস্ত মূলদ রাশি এই বিভাগে থাকবে না তারা উচ্চ বিভাগে অবস্থান করবে।

2·7 মূলদ রাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে বাস্তব মূলদ রাশি এবং বাস্তব অমূলদ রাশির সংজ্ঞা।

এতক্ষণ পর্যন্ত মূলদ রাশির বিভাগীকরণ নিয়ে আলোচনা করা হোলো। এখন মূলদ রাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে কি করে বাস্তব মূলদ রাশি এবং বাস্তব অমূলদ রাশির সংজ্ঞা দেওয়া যায় তা নিয়ে আলোচনা করা যাক। মনে রাখা প্রয়োজন বাস্তব মূলদ রাশি এবং বাস্তব অমূলদ রাশি নিয়েই বাস্তব রাশি গঠিত।

যে কোন রাশি ধরা যাক x'কে মূলদ রাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞা দেওয়া যাক (এখানে $x=p/q$, p এবং q পারস্পরিক মৌলিক সংখ্যা এবং $q \neq 0$)

যদি x থেকে যে সমস্ত রাশি ছোট সেগুলিকে L বিভাগে রাখা হয়, x থেকে যে রাশিগুলি বড় সেগুলিকে R বিভাগে রাখা হয় এবং x'কে হয় L বিভাগে না হয় R বিভাগে রাখা হয় তাহলে আমরা বলবো x রাশিটিকে মূলদ রাশির বিভাগীকরণের দ্বারা সংজ্ঞা দেওয়া হোলো। যে ক্ষেত্রে $x \in \mathrm{L}$ হবে সেক্ষেত্রে L বিভাগে x সর্বোচ্চ রাশি হবে। অথবা $x \in \mathrm{R}$ হলে R বিভাগে x সর্বনিম্ন রাশি হবে। এখন x যদি এই দুটি সর্তের যে কোন একটি সর্ত মেনে চলে তাহলে x'কে বলা হবে "বাস্তব মূলদ রাশি" এবং $\overline{x}$ প্রতীক দিয়ে এটিকে লেখা হয়। প্রসঙ্গত বলা প্রয়োজন আমরা 2·6 পরিচ্ছেদ দেখেছি—নিম্ন বিভাগ গঠন করতে গেলে এই বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি থাকবে না অতএব আমরা এক্ষেত্রে প্রথম সর্তটি ধরবো না। অর্থাৎ যে বিভাগীকরণের সাহায্যে কোন রাশিকে সংজ্ঞায়িত করা হয় এবং এই রাশিটি উচ্চ বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি হিসাবে বিবেচিত হয় তখন ঐ রাশিটিকে বাস্তব মূলদ রাশি বলা হবে। কিন্তু যদি রাশিটি R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি না হয় তাহলে ঐ রাশিটিকে বাস্তব অমূলদ রাশি বলা হবে।

প্রশ্ন করা যেতে পারে সাধারণ মূলদ রাশির সঙ্গে বাস্তব মূলদ রাশির পার্থক্য কোথায়? একটি সহজ উদাহরণের সাহায্যে এই পার্থক্যটি বুঝিয়ে দেবার চেষ্টা করছি।

সাধারণ মূলদ রাশি 2 এবং বাস্তব মূলদ রাশি $\overline{2}$ এর মধ্যে তুলনা করা যাক। সাধারণ মূলদ রাশি 2-কে p/q এই বিধি অনুযায়ী লেখা হয়ে থাকে (এখানে p এবং q পারস্পরিক মৌলিক সংখ্যা এবং $q \neq 0$, দ্রষ্টব্য 2·1 অনুচ্ছেদটি)। বাস্তব মূলদ রাশি $\overline{2}$-কে মূলদ রাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞা দেওয়া হয়ে থাকে অর্থাৎ $\overline{2} \equiv (L, R)$ এবং $2 \in R$ তাছাড়া R বিভাগে 2'ই সর্বনিম্ন রাশি। এথেকে স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে 2 এবং $\overline{2}$' এর মধ্যে পার্থক্য ন্যায়জনিত (logical)।

2·8 বিভাগীকরণের একটি বৈশিষ্ট্য ঃ অত্যন্ত ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশি k'-র প্রতিসঙ্গী (corresponding) দুটি রাশি $x \in L$ এবং $y \in R$ পাওয়া যাবে যার ফলে $y - x = k$ হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $a \in L$ এবং $b \in R$ তাহলে স্বভাবতঃই $b > a$ হবে। আর্কিমিডীয় স্বতঃসিদ্ধ থেকে আমরা বলতে পারি—এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা n পাওয়া যাবে, যার ফলে $nk > b - a$ হবে। অর্থাৎ $a + nk > b$; তাহলে আবার $a, a+k, a+2k, \cdots\cdots a+nk$ দিয়ে একটি সংহতি (set) গঠন করা যাক। এখন $a \in L$ এবং $a + nk \in R$ সুতরাং সংহতিস্থ দুটি পরপর রাশি ধরা যাক $a + rk$ এবং $a + (r+1)k$ পাব, যার ফলে $a + rk (= x)$ L বিভাগে অবস্থান করবে এবং $a + (r+1)k$ $(= y)$ R বিভাগে অবস্থান করবে। অতএব এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে $y - x = k$ হচ্ছে। অর্থাৎ আমরা বলতে পারি—কোন ধনাত্মক ক্ষুদ্র রাশি k'র জন্য দুটি রাশি $x \in L$ এবং $y \in R$ পাওয়া যাবে যার ফলে $y - x = k$ হবে।

2·9 দুটি রাশির মধ্যে ক্রমিক সম্পর্ক ঃ $\alpha_1 \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\alpha_2 \equiv (L_2, R_2)$ দুটি বাস্তব রাশি। এখন আমরা তিনটি ঘটনার সম্মুখীন হবো।

(i) L_1 বিভাগটি L_2 বিভাগটির একটি যথার্থ অংশ। অর্থাৎ L_1 বিভাগের প্রতিটি সদস্যই L_2 বিভাগের সদস্য কিন্তু L_2 বিভাগের

প্রতিটি সদস্য L_1 বিভাগের সদস্য নয়। অর্থাৎ $L_1 \subset L_2$ ($L_1 \subset L_2$ এর অর্থ L_1 বিভাগটি L_2 বিভাগের যথার্থ অংশ)

(ii) L_2 বিভাগটি L_1 বিভাগটির একটি যথার্থ অংশ। অর্থাৎ L_2 বিভাগের প্রতিটি সদস্যই L_1 বিভাগের সদস্য কিন্তু L_1 বিভাগের প্রতিটি সদস্য L_2 বিভাগের সদস্য নয়। অর্থাৎ $L_2 \subset L_1$।

(iii) L_1 এবং L_2 অভিন্ন (identical) অর্থাৎ L_1 বিভাগের সমস্ত সদস্যই L_2 বিভাগে থাকবে এবং L_2 বিভাগের সমস্ত সদস্যই L_1 বিভাগে থাকবে।

এখন এই তিনটি সম্পর্কের সাহায্যে আমরা দুটি বাস্তব রাশির মধ্যে কোনটি বড় অথবা কোনটি সমান তার সংজ্ঞা দেব।

পূর্বেই আমরা ধরেছি $\alpha_1 \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\alpha_2 \equiv (L_2, R_2)$। এখন (a) যখন L_1 বিভাগটি L_2 বিভাগের যথার্থ অংশ হবে তখন $\alpha_1 < \alpha_2$ বলা হবে।

(b) যখন L_1 এবং L_2 অভিন্ন হবে, তখন $\alpha_1 = \alpha_2$ বলা হবে।

(c) যখন L_2 বিভাগটি L_1 বিভাগের যথার্থ অংশ হবে তখন $\alpha_1 > \alpha_2$ হবে।

স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন উঠতে পারে—ক্রমিক সম্পর্ক কোথায় কাজে লাগানো হবে ? এই প্রশ্নের উত্তর খুঁজতে গেলে আমাদের কয়েকটি ব্যবহারিক প্রয়োগ জানা দরকার। (i) যদি $2 < 3$ হয় তাহলে কি বাস্তব মূলদ রাশি $\overline{2}$ বাস্তব মূলদরাশি $\overline{3}$ 'এর চেয়ে ছোট ? অর্থাৎ $\overline{2} < \overline{3}$ হবে কি ? হ্যাঁ, নিশ্চয়ই $\overline{2} < \overline{3}$ হবে। এটি প্রমাণ করতে গেলে ক্রমিক সম্পর্কের সাহায্য নিতে হবে। ধরা যাক $\overline{2} \equiv (L_2, R_2)$ এবং $\overline{3} \equiv (L_3, R_3)$ অর্থাৎ L_2 বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয়েছে যেগুলি 2 এর ছোট অর্থাৎ $L_2 = \{ x : x < 2 \}$ এবং R_2'তে 2 এর বড় সমান সমান রাশিগুলি রাখা হয়েছে। অর্থাৎ $R_2 = \{x : x \geq 2\}$। অনুরূপভাব বলা যায় $L_3 = \{ x : x < 3 \}$ এবং $R_3 = \{ x : x \geq 3 \}$। এখন $\overline{2} < \overline{3}$ দেখাতে গেলে আমাদের প্রমাণ করতে হবে L_2 বিভাগটি L_3 বিভাগটির একটি যথর্থে অংশ অর্থাৎ $L_2 \subset L_3$।

আমরা জানি $1 \in L_2$ যেহেতু $1 < 2$.

আবার $1 \in L_3$ যেহেতু $1 < 3$.

তাহলে দেখা যাচ্ছে L_2 বিভাগের সদস্যগুলি L_3 বিভাগের সদস্য।

আবার $\frac{5}{2} \in L_3$ যেহেতু $\frac{5}{2} < 3$.

কিন্তু $\frac{5}{2} \notin L_2$ যেহেতু $\frac{5}{2} > 2$

এথেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি L_2 বিভাগের সব সদস্যই L_3 বিভাগের সদস্য কিন্তু L_3 বিভাগের সব সদস্য L_2 বিভাগের সদস্য নয়। এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা বলতে পারি $L_2 \subset L_3$ অর্থাৎ ক্রমিক সম্পর্ক অনুযায়ী আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি $\overline{2} < \overline{3}$

এই পরিচ্ছেদে ক্রমিক সম্পর্কের সংজ্ঞা ও একটি ব্যবহারিক প্রয়োগ দেখানো হোলো। এবার দেখানো হবে ক্রমিক সম্পর্ক প্রতিবর্তিতা (Reflexivity), প্রতিসাম্য (Symmetry) ও সংক্রমিতা (Transivity) এই তিনটি প্রাথমিক বিধি মেনে চলে।

2·10 প্রতিবর্তিতা : α যদি বাস্তবরাশি হয় তাহলে আমরা দেখাবো $\alpha = \alpha$

প্রমাণ : যেহেতু α এবং α দুটিই বাস্তব রাশি অতএব এ দুটিকে মূলদ রাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে। ধরা যাক, বামপার্শ্বের $\alpha \equiv (L_1, R_1)$ এবং দক্ষিণপার্শ্বের $\alpha \equiv (L_2, R_2)$ আমাদের দেখাতে হবে $L_1 = L_2$ অর্থাৎ L_1 বিভাগের সব সদস্যই L_2 বিভাগের সদস্য এবং L_2 বিভাগের সব সদস্যই আবার L_1 বিভাগের সদস্য।

ধরা যাক, $x_1 \in L_1$ তাহলে $x_1 \in L_2$ …… (a)

আবার $y_1 \in L_2$ তাহলে $y_1 \in L_1$ …… (b)

অতএব (a) এবং (b) থেকে বলা যায় $L_1 = L_2$ অর্থাৎ $\alpha = \alpha$.

2·11. প্রতিসাম্য : যদি α এবং β দুটি বাস্তব রাশি হয় এবং $\alpha = \beta$ হয় তাহলে প্রমাণ করতে হবে $\beta = \alpha$.

প্রমাণ : যেহেতু α এবং β বাস্তবরাশি অতএব এ দুটি রাশিকে মূলদ রাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞায়িত করা যায়। ধরা যাক, $\alpha \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\beta \equiv (L_2, R_2)$। যেহেতু $\alpha = \beta$ অতএব ক্রমিক সম্পর্ক থেকে বলা যায় $L_1 = L_2$ এবং এ থেকে আমরা পাই $L_2 = L_1$ অর্থাৎ $\beta = \alpha$.

2·12. সংক্রমিতা : ধরা যাক, α_1, α_2 এবং α_3 তিনটি বাস্তবরাশি এবং $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_2 < \alpha_3$ তাহলে দেখাতে হবে $\alpha_1 < \alpha_3$.

প্রমাণ : আমরা আগেই দেখেছি, যে কোন বাস্তবরাশিকে মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞায়িত করা যায়। অতএব ধরা যাক, $\alpha_1 \equiv (L_1, R_1)$, $\alpha_2 \equiv (L_2, R_2)$ এবং $\alpha_3 \equiv (L_3, R_3)$।

এখন যেহেতু $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow L_1 \subset L_2$ …… (i)

আবার $\alpha_2 < \alpha_3 \Rightarrow L_2 \subset L_3$ …… (ii)

(i) এবং (ii) থেকে স্পষ্টই বলা যায় $L_1 \subset L_3$.

অর্থাৎ $\alpha_1 < \alpha_3$.

2·13 শূন্য, ধনাত্মক ও ঋণাত্মক বাস্তবরাশির সংজ্ঞা।

শূন্য : কোন রাশি a-কে বাস্তবরাশি শূন্য বলা হবে যদি উচ্চ বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি শূন্য অবস্থান করে অর্থাৎ

$$L = \{x : x \in Q, x < 0\}$$
$$R = \{x : x \in Q, x \geq 0\}$$

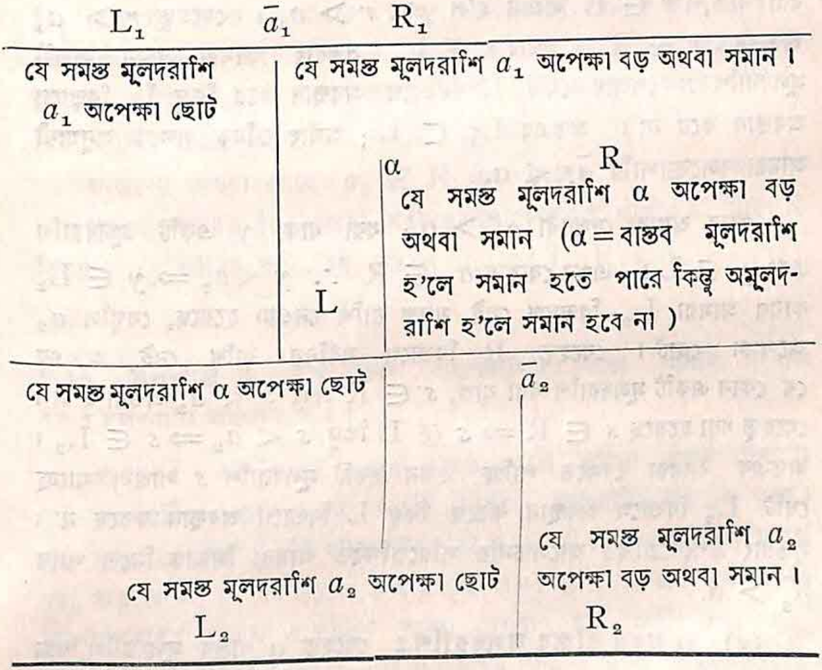
[এখানে Q এমন একটি সংহতি যার প্রত্যেকটি সদস্যকে p/q এই বিধিতে লেখা যায়। p ও q পারস্পরিক মৌলিক সংখ্যা এবং $q \neq 0$]

ধনাত্মক বাস্তবরাশি : যে কোন বাস্তবরাশি ধরা যাক, a-কে ধনাত্মক বলা হবে যদি নিম্নবিভাগে অন্ততঃ একটি ধনাত্মক মূলদরাশি অবস্থান করে অর্থাৎ নিম্নবিভাগে অসীম সংখ্যক ধনাত্মক মূলদরাশি অবস্থান করে।

ঋণাত্মক বাস্তবরাশি : যে কোন বাস্তবরাশি ধরা যাক, a-কে ঋণাত্মক বাস্তবরাশি বলা হবে যদি নিম্নবিভাগে অন্তত একটি ঋণাত্মক মূলদরাশি অবস্থান করে। অর্থাৎ নিম্নবিভাগে অসীম সংখ্যক ঋণাত্মক মূলদরাশি অবস্থান করে।

2·14 উপপাদ্য 1 ; $\alpha \equiv (L, R)$ একটি বাস্তবরাশি। a_1 একটি বাস্তব মূলদরাশি যেটি L বিভাগে অবস্থান করে এবং a_2 ভিন্ন একটি বাস্তব মূলদরাশি যেটি R বিভাগে অবস্থান করে তাহলে প্রমাণ করতে হবে $\bar{a}_1 < \alpha_1$, এবং $\bar{a}_2 \geq \alpha$.

প্রমাণ : যেহেতু $\bar{a}_1$ এবং $\bar{a}_2$ দুটি বাস্তব মূলদরাশি সুতরাং এই দুটিকে মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞা দেওয়া যায়। ধরা যাক, $\bar{a}_1 \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\bar{a}_2 \equiv (L_2, R_2)$। অর্থাৎ L_1 বিভাগে সেই সমস্ত মূলদরাশি রাখা হয়েছে যেগুলি a_1 অপেক্ষা ছোট এবং R_1 বিভাগে সেই সমস্ত মূলদরাশি রাখা হয়েছে যেগুলি a_1 অপেক্ষা বড় অথবা সমান। L_2 বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয়েছে যেগুলি a_2 অপেক্ষা ছোট এবং R_2 বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয়েছে সেগুলি a_2 অপেক্ষা বড় অথবা সমান। এখন যেহেতু α-কে বাস্তবরাশি বলা হয়েছে অতএব (ক) α বাস্তব অমূলদরাশি হতে পারে। অথবা (খ) বাস্তব মূলদরাশি হতে পারে।



(ক) **যখন α বাস্তব অমূলদরাশি** : যেহেতু α বাস্তব অমূলদরাশি অতএব আমাদের দেখাতে হবে $\bar{a}_1 < \alpha$ এবং $\bar{a}_2 > \alpha$। এখন $\alpha \equiv (L, R)$ বাস্তব অমূলদরাশি ধরার জন্য আমরা বলতে পারি L বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয়েছে যেগুলি α অপেক্ষা ছোট এবং R বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয়েছে যেগুলি α অপেক্ষা বড়।

অর্থাৎ দেখা যাচ্ছে L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই এবং R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি নেই।

প্রথমে আমরা দেখাবো $\bar{a}_1 < \alpha$। এটি দেখাতে গেলে আমাদের প্রমাণ করতে হবে $L_1 \subset L$। দেখা যাক এটি প্রমাণ করা যায় কিনা। ধরা যাক, $x \in L_1$ কিন্তু L_1 বিভাগে সেই সমস্ত রাশি লওয়া হয়েছে যেগুলি a_1 অপেক্ষা ছোট। অতএব $x < a_1$ কিন্তু $a_1 \in L \Rightarrow x \in L$ (কারণ আমরা জানি কোন রাশি L বিভাগের যে কোন রাশি অপেক্ষা ছোট হ'লে ঐ রাশিটি L বিভাগেই অবস্থান করবে)। আবার যেহেতু L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই, অতএব যে কোন একটি মূলদরাশি ধরা যাক, $r \in L$ লওয়া হ'ল এবং $r > a_1$। যেহেতু $r > a_1$ অতএব $r \in R_1$ অর্থাৎ $r \notin L_1$ সুতরাং আমরা এমন একটি মূলদরাশি r পেলাম যেটি L বিভাগে অবস্থান করে কিন্তু L_1 বিভাগে অবস্থান করে না। অতএব $L_1 \subset L$; অর্থাৎ ক্রমিক সম্পর্ক অনুযায়ী আমরা বলতে পারি $\bar{a}_1 < \alpha$.

এবার আমরা দেখাবো $\bar{a}_2 > \alpha$; ধরা যাক, y একটি মূলদরাশি এবং $y \in L$। এখন যেহেতু $a_2 \in R \;\therefore\; y < a_2 \Rightarrow y \in L_2$ কারণ আমরা L_2 বিভাগে সেই সমস্ত রাশি নেওয়া হয়েছে, যেগুলি a_2 অপেক্ষা ছোট। যেহেতু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি নেই, অতএব যে কোন একটি মূলদরাশি ধরা যাক, $s \in R$ এবং $s < a_2$ লওয়া হ'ল। যেহেতু ধরা হয়েছে $s \in R \Rightarrow s \notin L$ কিন্তু $s < a_2 \Rightarrow s \in L_2$। অতএব আমরা দেখতে পাচ্ছি, এমন একটি মূলদরাশি s পাওয়া যাচ্ছে যেটি L_2 বিভাগে অবস্থান করছে কিন্তু L বিভাগে অবস্থান করছে না। সুতরাং উপরেল্লেখিত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি $\bar{a}_2 > \alpha$.

(খ) **α যখন বাস্তব মূলদরাশিঃ** যেহেতু α বাস্তব মূলদরাশি ধরা হয়েছে সুতরাং এটির প্রতিসঙ্গী যে কোন একটি রাশি b পাওয়া যাবে, যার ফলে $\alpha = \bar{b} \equiv (L, R)$। সুতরাং L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি থাকছে না কিন্তু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি থাকছে। আমাদের প্রমাণ করতে হবে $\bar{a}_1 < \alpha$ অর্থাৎ দেখাতে হবে $L_1 \subset L$।

ধরা যাক, যে কোন মূলদরাশি $p \in L_1$ তাহলে $p < a_1$ কারণ L_1 বিভাগে সেই সমস্ত রাশিগুলি রাখা হয়েছে যেগুলি a_1 অপেক্ষা

ছোট। কিন্তু $a_1 \in L \Rightarrow p \in L$. আবার যেহেতু L বিভাগে সর্বোচ্চরাশি নেই সুতরাং ধরা যাক, যে কোন মূলদরাশি $q \in L$ এবং $q > a_1$। যেহেতু $a_1 \in R_1 \Rightarrow q \in R_1 \Rightarrow q \notin L_1$ সুতরাং আমরা বলতে পারি L বিভাগের অন্তর্গত এমন একটি রাশি পাওয়া যাবে যেটি L_1 বিভাগে নেই। অতএব $L_1 \subset L$ অর্থাৎ $\bar{a}_1 < \alpha$.

এবার আমরা প্রমাণ করবো $\bar{a}_2 \geq \alpha$.

ধরা যাক, মূলদরাশি $l \in L$। যেহেতু $a_2 \in R$ অতএব $l < a_2$ কিন্তু আমরা L_2 বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রেখেছি যেগুলি a_2 অপেক্ষা ছোট অতএব এক্ষেত্রে $l \in L_2$ অর্থাৎ L বিভাগের প্রত্যেকটি রাশিই L_2 বিভাগের সদস্য। আবার যেহেতু R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি b আছে সেইহেতু $b \notin L$ এবং $b < a_2 \Rightarrow b \in L_2$ সুতরাং এক্ষেত্রে আমরা দেখতে পাচ্ছি L_2 বিভাগে এমন একটি রাশি অবস্থান করছে যেটি L বিভাগে নেই অর্থাৎ $L \subset L_2 \Rightarrow \bar{a}_2 > \alpha$.

আমাদের দেওয়া আছে $a_2 \in R$ এবং যেহেতু α বাস্তব মূলদরাশি ধরা হয়েছে অতএব R বিভাগে সর্বনিম্নরাশি নিশ্চয়ই থাকবে। যদি R বিভাগে a_2 সর্বনিম্ন রাশি হয় তাহলে $\bar{a}_2 \equiv (L, R) \equiv \alpha$.

$$\therefore \quad \bar{a}_2 \geq \alpha.$$

2.15 উপপাদ্য 2. দুটি ভিন্ন বাস্তবরাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব মূলদরাশি অবস্থান করে।

প্রমাণ ঃ এই তত্ত্বটি প্রমাণ করতে গেলে আমরা প্রথমে দেখাবো দুটি বাস্তবরাশির মধ্যে অন্তত একটি বাস্তব মূলদরাশি অবস্থান করে। ধরা যাক, α এবং β দুটি বাস্তবরাশি এবং $\alpha \neq \beta$। আমাদের সুবিধার্থে ধরা যাক $\alpha < \beta$, যেহেতু α এবং β দুটি বাস্তব রাশি অতএব মূলদরাশির বিভাগীকরণের মাধ্যমে এ দুটিকে সংজ্ঞা দেওয়া যায় অর্থাৎ ধরা যাক, $\alpha \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\beta = (L_2, R_2)$। এখন যেহেতু $\alpha < \beta$ ধরা হয়েছে, অতএব ক্রমিক সম্পর্ক অনুযায়ী বলা যায় L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশিই L_2 বিভাগে অবস্থান করে কিন্তু L_2 বিভাগে এমন অন্তত একটি রাশি পাওয়া যাবে যেটি L_1 বিভাগে অবস্থান করবে না। ধরা যাক, $r \in L_2$ কিন্তু $r \notin L_1 \Rightarrow r \in R_1$; সংজ্ঞানুযায়ী L_2 বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি না থাকায় আমরা L_2 বিভাগে পছন্দমত এমন দুটি মূলদরাশি s

এবং t পাব যার ফলে $r < s < t$ হয়। যেহেতু $r \in R_1$ তাহলে বলা যেতে পারে $s \in R_1$; $t \in R_1$; এখন মূলদরাশি s-এর প্রতিসঙ্গী একটি বাস্তব মূলদরাশি $\bar{s}$ লওয়া যাক। যেহেতু $\bar{s}$ বাস্তব মূলদরাশি অতএব $\bar{s} \equiv (L, R)$। এখন L_1 বিভাগে যে কোন মূলদরাশি x লওয়া যাক অর্থাৎ $x \in L_1 \Rightarrow x < s$ (যেহেতু $s \in R_1$)

$$\Rightarrow x \in L. \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার যেহেতু $r < s \Rightarrow r \in L$ কিন্তু $r \in R_1 \Rightarrow r \notin L_1$

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি L বিভাগে অন্তত এমন একটি মূলদ-রাশি পাওয়া যাচ্ছে যেটি L_1 বিভাগে অবস্থান করে না ··· (ii)

(i) এবং (ii) থেকে বলা যায় $\alpha < \bar{s} \cdots$ (iii)

আবার ধরা যাক $y \in L \Rightarrow y < s$.

কিন্তু $s \in L_2 \Rightarrow y \in L_2$

$$\Rightarrow L \subset L_2 \cdots \quad \text{(iv)}$$

এখন যেহেতু $t \in L_2$ এবং $t > s \Rightarrow t \in R$

$$\Rightarrow t \notin L.$$

সুতরাং আমরা দেখতে পেলাম যে L_2 বিভাগে এমন একটি রাশি পাওয়া যাচ্ছে যেটি L বিভাগে নেই। .... (v)

সুতরাং (iv) এবং (v) থেকে বলা যায় $\bar{s} < \beta \cdots$ (vi)

অতএব (iii) এবং (vi) এর সাহায্যে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি $\alpha < \bar{s} < \beta$ অর্থাৎ বলা যায় দুটি ভিন্ন বাস্তবরাশির মধ্যে একটি বাস্তব মূলদরাশি অবস্থান করে। উপরেল্লেখিত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে সিদ্ধান্ত নিতে পারা যায় যে দুটি ভিন্ন বাস্তবরাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব মূলদরাশি অবস্থান করে।

2·16 উপপাদ্য 3 : দুটি ভিন্ন বাস্তবরাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব অমূলদরাশি অবস্থান করে।

প্রমাণ : ধরা যাক a এবং b দুটি ভিন্ন বাস্তবরাশি এবং $a < b$ আমরা প্রমাণ করবো a এবং b 'এর মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব অমূলদরাশি অবস্থান করে। আমরা পূর্বের অনুচ্ছেদে দেখেছি যে দুটি ভিন্ন বাস্তব রাশির

মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব মূলদরাশি অবস্থান করে। এটির সাহায্য নিয়ে আমরা দুটি বাস্তব মূলদরাশি x_1 এবং x_2 'কে এমন ভাবে নিতে পারি যার ফলে $a < x_1 < x_2 < b$ হয়।

ধরা যাক β একটি বাস্তব অমূলদরাশি। এখন যদি $x_1 < \beta < x_2$ হয় তাহলে আমরা আমাদের তত্ত্বটির প্রমাণ সঙ্গে সঙ্গে পেয়ে গেলাম। কিন্তু যদি β বাস্তব অমূলদরাশিটি x_1 এবং x_2 মধ্যে অবস্থান না করে তাহলে এক্ষেত্রে আমরা y_1 এবং y_2 এমন দুটি ভিন্ন বাস্তব মূলদরাশি নিলাম যার ফলে $(y_2 - y_1) < (x_2 - x_1)$ এবং $y_1 < \beta < y_2$ হয়।

যেহেতু β 'কে বাস্তব অমূলদরাশি ধরা হয়েছে অতএব $\beta + x_1 - y_1$ বাস্তব অমূলদরাশি

$$(\beta + x_1 - y_1) - x_1 = \beta - y_1,$$

= ধনাত্মক রাশি

(যেহেতু $y_1 < \beta < y_2$)

$$x_2 - (\beta + x_1 - y_1) = (x_2 - x_1) + y_1 - \beta.$$

$$= (x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) + (y_2 - \beta)$$

$$= (y_2 - \beta) + \{(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)\}$$

= ধনাত্মক রাশি

(যেহেতু $y_2 > \beta$ এবং $x_2 - x_1 > y_2 - y_1$)

অর্থাৎ $x_1 < \beta + x_1 - y_1 < x_2$.

আমরা তাহলে দেখলাম x_1 এবং x_2 'র মধ্যে β একটি বাস্তব অমূলদ রাশি অবস্থান করছে। এবং $a < x_1 < \beta + x_1 - y_1 < x_2 < b$। যেহেতু a এবং b এর মধ্যে x_1 এবং x_2 পছন্দমত বাস্তব মূলদরাশি নেওয়া হয়েছে অতএব আমরা বলতে পারি a এবং b এর মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব মূলদরাশি অবস্থান করে এবং এ থেকে বলা যায় a এবং b এর মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব অমূলদরাশি অবস্থান করে।

2·17 উপপাদ্য 4. বাস্তবরাশি সম্পর্কে ডেডেকিণ্ডের তত্ত্ব

সমস্ত বাস্তব রাশিগুলিকে এমনভাবে $(\bar{L}, \bar{R})$ এই দুটি বিভাগে ভাগ করা হলো যার ফলে

(ক) কোন বিভাগই লুপ্ত হবে না অর্থাৎ প্রতিটি বিভাগেই কোন না কোন রাশি অবস্থান করবে।

(খ) প্রত্যেকটি বাস্তব রাশিই হয় $\overline{\text{L}}$ বিভাগে না হয় $\overline{\text{R}}$ বিভাগে অবস্থান করবে।

(গ) $\overline{\text{L}}$ বিভাগে অবস্থিত যে কোন বাস্তব রাশি $\overline{\text{R}}$ বিভাগে অবস্থিত যে কোন বাস্তব রাশি অপেক্ষা ছোট হবে।

তাহলে উপরেল্লেখিত তিনটি সর্তের পরিপ্রেক্ষিতে আমাদের দেখাতে হবে

হয় (i) $\overline{\text{L}}$ বিভাগে সর্বোচ্চ বাস্তব রাশি থাকবে এবং সেক্ষেত্রে $\overline{\text{R}}$ বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি থাকবে না।

না হয় (ii) $\overline{\text{R}}$ বিভাগে সর্বনিম্ন বাস্তবরাশি থাকবে এবং সেক্ষেত্রে $\overline{\text{L}}$ বিভাগে সর্বনিম্ন কোন বাস্তব রাশি থাকবে না।

প্রমাণ ঃ উপরেল্লেখিত তত্ত্বটি প্রমাণ করতে গেলে নিম্নে বর্ণিত দুটি তত্ত্বের উক্তি মনে রাখা প্রয়োজন।

(i) দুটি বাস্তব রাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব মূলদরাশি অবস্থান করে।

(ii) যদি $\alpha \equiv (\text{L}, \text{R})$ একটি বাস্তব রাশি ধরা হয় এবং $a_1 \in \text{L}$, $a_2 \in \text{R}$ হয় তাহলে $\overline{a_1} < \alpha$ এবং $\overline{a_2} \geq \alpha$ হবে।

এখন আমরা মূল তত্ত্বটি প্রমাণ করবো। প্রকল্প অনুযায়ী $\overline{\text{L}}$ বিভাগে নিশ্চয়ই একটি বাস্তব রাশি ধরা যাক x অবস্থান করবে। এখন x'কে নিরূপণের জন্য একটি মূলদরাশির বিভাগীকরণ (L', R') চিন্তা করা যাক। অর্থাৎ $x \equiv (\text{L}', \text{R}')$। তাহলে বিভাগীকরণের নিয়মানুযায়ী L' বিভাগে নিশ্চয়ই একটি মূলদরাশি থাকবে। ধরা যাক $r \in \text{L}'$ তাহলে (ii) নং উক্তির সাহায্যে বলা যায় $\overline{r} < x$ কিন্তু যেহেতু $x \in \overline{\text{L}} \Rightarrow \overline{r} \in \overline{\text{L}}$। সুতরাং এক্ষেত্রে আমরা এমন একটি বাস্তব মূলদরাশি $\overline{r}$ পেলাম যেটি $\overline{\text{L}}$ বিভাগে অবস্থান করে। অনুরূপভাবে আমরা দ্বিতীয় একটি বাস্তব মূলদরাশি $\overline{s}$ পাব যেটি $\overline{\text{R}}$ বিভাগে অবস্থান করবে। ধরা যাক $\{\overline{r}\}$ একটি বাস্তব মূলদরাশির সংহতি (set) যেটি $\overline{\text{L}}$ বিভাগে অবস্থান করে এবং $\{\overline{s}\}$ ভিন্ন একটি বাস্তব মূলদরাশির সংহতি যেটি $\overline{\text{R}}$ বিভাগে অবস্থান করে।

ধরা যাক $\{r\}$ মূলদরাশির সংহতির প্রতিষঙ্গী $\{\overline{r}\}$ বাস্তব মূলদরাশির সংহতি এবং $\{s\}$ মূলদরাশির সংহতির প্রতিষঙ্গী $\{\overline{s}\}$ বাস্তব মূলদরাশির সংহতি। মনে রাখা প্রয়োজন $\{r\}$ মূলদরাশির সংহতির যে কোন সদস্য $\{s\}$ মূলদরাশির সংহতির যে কোন সদস্য অপেক্ষা ছোট। এখন $\{r\}$ সংহতিটির

সমস্ত রাশিগুলিকে একটি বিভাগে স্বাভাবিক ক্রম অনুযায়ী সাজিয়ে রাখা যাক। এবং এই বিভাগকে L বিভাগ বলে মনে করা হ'লো। অনুরূপভাবে $\{s\}$ সংহতিটির সমস্ত রাশিগুলিকে অন্য একটি বিভাগে স্বাভাবিকক্রম অনুযায়ী সাজানো হোলো। এই নূতন বিভাগটিকে R বিভাগ বলে চিহ্নিত করা হ'লো। তাহলে (L, R) একটি মূলদরাশির বিভাগীকরণ। সুতরাং এই বিভাগীকরণ নিশ্চয়ই কোন না কোন বাস্তব রাশিকে নিরূপণ করবে। ধরা যাক α বাস্তব রাশিটিকে (L, R) বিভাগ করণের মাধ্যমে নিরূপণ করা হ'লো। যেহেতু α বাস্তবরাশি অতএব α হয় $\bar{L}$ বিভাগে না হয় $\bar{R}$ বিভাগে অবস্থান করবে।

প্রথম ঘটনাঃ ধরা যাক $\alpha \in \bar{L}$। তাহলে এক্ষেত্রে আমাদের দেখাতে হবে $\bar{L}$ বিভাগের α'ই সর্বোচ্চ রাশি (number)। ধরা যাক সিদ্ধান্তটি ঠিক নয় এবং সম্ভব হলে $\bar{L}$ বিভাগে α'র থেকে বড় যে কোন একটি বাস্তবরাশি β নেওয়া হোলো অর্থাৎ $\alpha < \beta$ কিন্তু (i) এর সাহায্যে আমরা বলতে পারি α এবং β'র মধ্যে অন্তত একটি বাস্তব মূলদরাশি অবস্থান করবে। ধরা যাক এই বাস্তব মূলদরাশিটি হচ্ছে $\bar{v}$ যেটি α এবং β'র মধ্যে অবস্থান করছে অর্থাৎ $\alpha < \bar{v} < \beta$। যেহেতু $\bar{v}$ একটি বাস্তব মূলদরাশি অতএব $\bar{v} \equiv (L_v, R_v)$ ধরতে পারি এবং L_v বিভাগে সেই সমস্ত মূলদরাশি অবস্থান করে যারা v এর চেয়ে ছোট অর্থাৎ $L_v = \{x : x < v\}$। R_v বিভাগে সেই সমস্ত মূলদরাশি অবস্থান করবে যেগুলি V'এর বড় অথবা সমান অর্থাৎ $R_v = (x : x \geq v\}$.

এখন যেহেতু $\alpha < \bar{v}$ অতএব L বিভাগে অবস্থিত সমস্ত মূলদরাশি L_v বিভাগে থাকবে কিন্তু L_v বিভাগে অন্তত এমন একটি মূলদরাশি পাওয়া যাবে যেটি L বিভাগে থাকবে না। ধরা যাক $u \in L_v$ কিন্তু $u \notin L$ যেহেতু $u \notin L \Rightarrow u \in R$ অর্থাৎ $\bar{u} \in \bar{R} \cdots$ (i) আবার যেহেতু $u \in L_v \ \therefore u < v \Rightarrow \bar{u} < \bar{v}$ কিন্তু $\bar{v} \in \bar{L} \Rightarrow \bar{u} \in \bar{L} \cdots$ (ii) সুতরাং (i) এবং (ii) এ পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হচ্ছি। এই অসম্ভব সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পিছনে আমাদের অনুমান $\alpha < \beta$ দায়ী অর্থাৎ এই অনুমান সত্য নয় অর্থাৎ $\bar{L}$ বিভাগে α'ই সর্বোচ্চ রাশি।

দ্বিতীয় ঘটনাঃ অনুরূপ ভাবে আমরা দেখাতে পারবো যদি $\alpha \in \bar{L}$ হয় তবে সেক্ষেত্রে $\bar{R}$ বিভাগে α'ই সর্বনিম্ন রাশি।

2·18 উপসিদ্ধান্ত ঃ উপরেল্লেখিত ঘটনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা একটি উপসিদ্ধান্তে আসতে পারি। যেহেতু α বাস্তব রাশি অতএব α হয় L বিভাগে না হয় R বিভাগে অবস্থান করবে এবং কোন মতেই তৃতীয় ঘটনা ঘটবে না। সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি সমস্ত বাস্তব রাশিগুলিকে দুটি ভাগে ভাগ করা যায় এবং এরই ফলে একটি বিভাগীকরণের সৃষ্টি হয়। এই বিভাগীকরণ সর্বদাই একটি অনন্য (unique) বাস্তবরাশি ধরা যাক α'কে নিরূপণ করে এবং লক্ষ্য করলে দেখা যাবে α যদি L বিভাগে থাকে তবে সর্বোচ্চ রাশি হবে, আবার α যদি L বিভাগে না থেকে R বিভাগে থাকে তবে সর্বনিম্ন হবে কিন্তু অন্য কোন ঘটনা ঘটবে না। আবার আমরা যখন মূলদরাশির বিভাগীকরণ নিয়ে আলোচনা করবো তখন আমরা দেখবো কোন কোন সময় L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই এবং সেই একই সময় R বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি নেই। এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি ঃ

(A) যদিও মূলদরাশির সংহতি ঘন তবুও এর মধ্যে শূন্যতা থাকে

(B) কিন্তু বাস্তব রাশির সংহতিতে কোন শূন্যতা থাকে না।

তৃতীয় অধ্যায়

গাণিতিক ক্রিয়া (Mathematical operation)

3·1 এই অধ্যায়ে আমরা গাণিতিক ক্রিয়ার কতকগুলি বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করবো। প্রথমে আমরা বাস্তব রাশিদ্বয়ের যোগ, বিয়োগাত্মক বাস্তবরাশি, যোগের বিনিময় নিয়ম (Commutative law), যোগের সংযোগ নিয়ম (Associative law), যোগক্ষম অভেদের অস্তিত্ব (Existence of additive inverse), যোগের একান্বয়ে নিয়ম (Law of monotony for addition) প্রভৃতি বৈশিষ্ট্যের কথা আলোচনা করবো।

3·2 দুটি বাস্তব রাশির যোগ (Sum of two real numbers)

ধরা যাক $\alpha \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\beta \equiv (L_2, R_2)$ দুটি বাস্তবরাশি। আমরা এমন একটি মূলদরাশির বিভাগীকরণ (L, R) গঠন করবো যেটি α এবং β বাস্তব রাশিদ্বয়ের যোগফলে উদ্ভূত। এটি দেখাতে গেলে প্রথমে দেখানো দরকার L বিভাগটি (L, R) মূলদরাশির বিভাগীকরণের নিম্ন বিভাগ।

ধরা যাক L বিভাগের সমস্ত মূলদরাশি L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি মূলদ-রাশির সঙ্গে L_2 বিভাগের প্রত্যেকটি মূলদরাশির যোগফলে গঠিত অর্থাৎ $L = \{ a_i + b_i : a_i \in L_1, b_i \in L_2 \}$। এখন

(i) যেহেতু R_1 এবং R_2 বিভাগদ্বয়ে কোন না কোন মূলদরাশি অবস্থান করে অতএব ধরা যাক $x_1 \in R_1$ এবং $x_2 \in R_2$

$\therefore \; x_1 \notin L_1$ এবং $x_2 \notin L_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \notin L.$

অতএব দেখা যাচ্ছে L বিভাগে সমস্ত মূলদরাশি অবস্থান করছে না।

(ii) এবার আমরা দেখাবো যে কোন মূলদরাশি L বিভাগের অন্তর্গত যে কোন মূলদরাশি অপেক্ষা ছোট হলেও ঐ L বিভাগেই অবস্থান করবে। অর্থাৎ ধরা যাক $a \in L$ এবং $b < a$ তাহলে আমরা দেখাবে $b \in L$। যেহেতু $a \in L$ তাহলে L বিভাগের গঠন-প্রণালী অনুযায়ী আমরা দুটি রাশি

$a_1 \in L_1$ এবং $a_2 \in L_2$ পাব যার ফলে $a = a_1 + a_2$ হবে। এখন যেহেতু $b < a$ ধরা হয়েছে অতএব ধরা যাক $b = a - x$ (x একটি ধনাত্মক মূলদরাশি)

$$\therefore \quad b = a_1 + a_2 - x = (a_1 - x) + a_2.$$

এখন যেহেতু $a_1 - x$ রাশিটি L_1 বিভাগে অবস্থিত a_1 রাশি অপেক্ষা ছোট অতএব $a_1 - x \in L_1$ (কারণ আমরা জানি যে কোন রাশি কোন মূলদরাশির বিভাগীকরণের নিম্নবিভাগের কোন রাশি অপেক্ষা ছোট হলে ঐ নিম্ন বিভাগেই অবস্থান করে)। সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি b রাশিটি L_1 বিভাগে অবস্থিত $a_1 - x$ রাশির সঙ্গে L_2 বিভাগের a_2 রাশির যোগফলে গঠিত। অতএব $b \in L$.

(iii) শেষ পর্যায়ে আমাদের দেখাতে হবে L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই। ধরা যাক $b \in L$ একটি সর্বোচ্চ রাশি। যেহেতু $b \in L$ অতএব আমরা নিশ্চয়ই দুটি বাস্তব রাশি $a_1 \in L_1$ এবং $a_2 \varepsilon L_2$ পাব যার ফলে $a_1 + a_2 = b$ হবে। আবার যেহেতু L_1 বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই অতএব আমরা এমন একটি মূলদরাশি c_1'এর সন্ধান পাবো যেটি L_1 বিভাগে অবস্থান করে এবং $c_1 > a_1$। ঠিক অনুরূপভাবে L_2 বিভাগে এমন একটি মূলদরাশি c_2 পাওয়া যাবে যেটি a_2 অপেক্ষা বড়।

এখন $c_1 \in L_1$ এবং $c_2 \in L_2 \Rightarrow c_1 + c_2 \in L$ ··· (ক)

আবার $c_1 + c_2 > a_1 + a_2 = b$ ··· (খ)

তাহলে (ক) এবং (খ) থেকে দেখতে পাচ্ছি L বিভাগে অবস্থিত এমন একটি মূলদরাশির সন্ধান পাওয়া যাচ্ছে যেটি L বিভাগে অবস্থিত সর্বোচ্চ রাশি অপেক্ষাও বড়। অতএব আমরা স্ববিরোধী সিদ্ধান্তে উপস্থিত হচ্ছি। এই স্ববিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার কারণ L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি b ধরা হয়েছে। অতএব এটি ঠিক নয়। অর্থাৎ L বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই।

এতক্ষণ পর্যন্ত যে সব যুক্তির অবতারণা করা হ'লো তা থেকে স্পষ্টত বোঝা যাচ্ছে L বিভাগটি একটি নিম্ন বিভাগ। এখন R বিভাগে সেই সমস্ত মূলদরাশি অবস্থান করবে যেগুলি L বিভাগে নেই। সুতরাং (L, R) একটি মূলদরাশির বিভাগীকরণ যেটি (L_1, R_1) এবং (L_2, R_2)'র যোগফলে উদ্ভূত।

অতএব আমরা বলতে পারি $\alpha \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\beta \equiv (L_2, R_2)$ এই

দুটি বাস্তবরাশির যোগফলে এমন একটি বাস্তবরাশি $\gamma \equiv (\mathrm{L}, \mathrm{R})$ গঠন করা যাবে যার L বিভাগটি L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L_2 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির যোগফলে গঠিত।

3·3 বিয়োগাত্মক বাস্তব রাশি (The negative of a real number) :

α একটি বাস্তবরাশি। আমাদের এমন একটি বাস্তবরাশি গঠন করতে হবে যেটি α বাস্তব রাশির বিয়োগাত্মক হয় অর্থাৎ—α বাস্তব রাশি গঠন করতে হবে।

যেহেতু α বাস্তব রাশি সুতরাং মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে এটিকে সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে অর্থাৎ $a \equiv (\mathrm{L}, \mathrm{R})$ ধরা যাক। এখন আমাদের এমন একটি মূলদরাশির বিভাগীকরণ $(\mathrm{L}_1, \mathrm{R}_1)$ গঠন করতে হবে যার L_1 বিভাগে R বিভাগের সমস্ত রাশিগুলির বিয়োগাত্মক রাশিগুলি থাকবে কিন্তু একমাত্র যদি কোন সর্বনিম্ন রাশি R বিভাগে থেকে থাকে তার বিয়োগাত্মক রাশিটি L_1 বিভাগে থাকবে না। অর্থাৎ $\mathrm{L}_1 = \{-x : x \in \mathrm{R}$ কিন্তু x রাশিটি R বিভাগের সর্বনিম্ন রাশি নয় $\}$। স্বভাবতই L_1 বিভাগের অস্তিত্ব থাকছে এবং L_1 বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি থাকছে না।

এবার আমাদের দেখাতে হবে যদি কোন রাশি L_1 বিভাগে অবস্থিত কোন রাশির চেয়ে ছোট হয় তাহলে ঐ রাশিটি L_1 বিভাগেই অবস্থান করবে। অর্থাৎ ধরা যাক $a \in \mathrm{L}_1$; b একটি মূলদ রাশি এবং $b < a$। আমাদের দেখাতে হবে $b \in \mathrm{L}_1$। যেহেতু $-(-a) = a$, অতএব a রাশিটি $-a$ রাশিটির বিয়োগাত্মক এবং সেইহেতু $-a \in \mathrm{R}$। যেহেতু আমরা ধরেছি $b < a$ অতএব $-b > -a \therefore -b \in \mathrm{R} \Rightarrow -(-b) = b \in \mathrm{L}_1$ সুতরাং আমরা দেখতে পেলাম L_1 বিভাগে অবস্থিত যে কোন রাশি অপেক্ষা ছোট কোন রাশি ঐ L_1 বিভাগেই অবস্থান করে।

উপরেল্লেখিত ঘটনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা দেখতে পাচ্ছি

(ক) সমস্ত মূলদরাশিই L_1 বিভাগে থাকছে না।

(খ) L_1 বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই।

(গ) L_1 বিভাগে অবস্থিত যে কোন রাশি অপেক্ষা ছোট কোন রাশি ঐ L_1 বিভাগে অবস্থান করে।

অতএব L_1 বিভাগটি নিম্ন বিভাগ এবং R_1 বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয়েছে যেগুলি L_1 বিভাগে নেই। অতএব (L_1, R_1) একটি মূলদ-রাশির বিভাগীকরণ এবং এটি (L, R) বিভাগীকরণের বিয়োগাত্মকের ফলে উদ্ভূত। তাহলে আমরা $-(L, R) \equiv -\alpha$ বলতে পারি। $\alpha \equiv (L, R)$ বাস্তবরাশির বিয়োগাত্মক $-\alpha \equiv (L_1, R_1)$ বলা যেতে পারে যদি L_1 বিভাগে R বিভাগের যদি কোন সর্বনিম্ন রাশি থাকে সেটি ছাড়া অন্যান্য সমস্ত রাশিগুলির বিয়োগাত্মক নিয়ে গঠিত হয়।

3·4 যোগের বিনিময় নিয়ম (Commutative law for addition) ঃ

ধরা যাক α এবং β দুটি বাস্তবরাশি। অতএব $\alpha \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\beta \equiv (L_2, R_2)$। তাছাড়া ধরা যাক $\alpha + \beta \equiv (L', R')$ এবং $\beta + \alpha \equiv (L'', R'')$। আমাদের দেখাতে হবে L' এবং L'' অভিন্ন। মনে রাখা প্রয়োজন L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L_2 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির যোগফলে L' বিভাগটি গঠিত হয়েছে। অনুরূপভাবে L_2 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির যোগফলে L'' গঠিত হয়েছে।

এখন ধরা যাক $a_1 \in L_1, a_2 \in L_2$।

আমরা জানি $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ কিন্তু $a_1 + a_2 \in L'$ এবং $a_2 + a_1 \in L''$ অতএব $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

3·5 যোগের সংযোগ নিয়ম (Associative law for addition)

α, β এবং γ তিনটি বাস্তবরাশি। তাহলে প্রমাণ করতে হবে

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

ধরা যাক $\alpha \equiv (L_1, R_1)$, $\beta \equiv (L_2, R_2)$, $\gamma \equiv (L_3, R_3)$

$\alpha + (\beta + \gamma) = (L', R')$ এবং $(\alpha + \beta) + \gamma \equiv (L'', R'')$

আমরা দেখাবো L' এবং L'' অভিন্ন।

মনে রাখা প্রয়োজন, প্রথমে L_2 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L_3 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশি যোগ করা হয় এবং তারপর ঐ যোগফল L_1

বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে যোগ করলে L' বিভাগটি গঠিত হয় অর্থাৎ $L' = \{a_1 + (a_2 + a_3) : a_1 \in L_1, a_2 \in L_2$ এবং $a_3 \in L_3\}$

অনুরূপ ভাবে L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L_2 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশি যোগ করা হয় এবং তারপর ঐ যোগফল L_3 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে যোগ করলে L'' বিভাগটি গঠিত হয়। অর্থাৎ

$L'' = \{(a_1 + a_2) + a_3 : a_1 \in L_1, a_2 \in L_2$ এবং $a_3 \in L_3\}$
এখন যেহেতু $a_1 \in L_1, a_2 \in L_2$ এবং $a_3 \in L_3$। অতএব মূলদরাশির সংযোগ নিয়ম অনুযায়ী আমরা বলতে পারি

$$a_1 + (a_2 + a_3) = (a_1 + a_2) + a_3$$

কিন্তু $a_1 + (a_2 + a_3) \in L'$ এবং $(a_1 + a_2) + a_3 \in L''$

অতএব L' এবং L'' অভিন্ন।

অর্থাৎ $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

3·6 যোগক্ষম অভেদের অস্তিত্ব (Existence of additive inverse) :

α একটি বাস্তবরাশি। আমরা দেখাবো $\alpha + \bar{0} + \alpha$। ধরা যাক $\bar{0} \equiv (L', R')$ সুতরাং R' বিভাগে 0 রাশিটিই নিম্নরাশি এবং L' বিভাগে সমস্ত ঋণাত্মক রাশিগুলি অবস্থান করে।

ধরা যাক $\alpha \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\alpha + \bar{0} \equiv (L, R)$। সুতরাং স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L' বিভাগের ঋণাত্মক রাশির যোগফলে L বিভাগটি গঠিত হয়েছে। এখন আমাদের দেখাতে হবে L_1 এবং L বিভাগ দুটি অভিন্ন অর্থাৎ L বিভাগে অবস্থিত রাশিগুলি L_1 বিভাগে অবস্থান করবে এবং বিপরীতক্রমে L_1 বিভাগে অবস্থিত রাশিগুলি L বিভাগে অবস্থান করবে। দেখা যাক আমরা এই বক্তব্যটিকে প্রমাণ করতে পারি কি না।

ধরা যাক $b \in L$ সুতরাং L_1 বিভাগের যে কোন রাশি মনে করা যাক a_1 'এর সঙ্গে L' বিভাগের ঋণাত্মক রাশি $-x$'কে যোগ করার ফলে b গঠিত হয়েছে। অর্থাৎ $b = a_1 - x$ এবং তাহলে $b = a_1 - x < a_1$ $\Rightarrow b \in L_1$ (কারণ আমরা জানি নিম্ন বিভাগে অবস্থিত যে কোন রাশি

অপেক্ষা কোন রাশি ছোট হলে ঐ নিম্ন বিভাগেই অবস্থান করবে)। অতএব আমরা দেখতে পেলাম যে কোন রাশি $b \in L \Rightarrow b \in L_1$

এবার আমরা দেখাবো যদি কোন রাশি ধরা যাক $a_1 \in L_1$ হলে $a_1 \in L$ হবে। এখন যেহেতু L_1 বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই অতএব $a_1 + k$ একটি রাশি L_1 বিভাগে নেওয়া যেতে পারে। মনে রাখা প্রয়োজন এখানে $k > 0$। অতএব বলা যেতে পারে L_1 বিভাগে অবস্থিত $a_1 + k$ রাশির সঙ্গে L' বিভাগে অবস্থিত $(-k)$ রাশির যোগফলে a_1 রাশিটি গঠিত হয়েছে। সুতরাং L বিভাগের সংজ্ঞানুযায়ী বলা যেতে পারে $a_1 \in L$ অর্থাৎ $a_1 \in L_1 \Rightarrow a_1 \in L$.

সুতরাং উপরেল্লেখিত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায় $a_1 \in L_1 \Rightarrow a_1 \in L$.

3·7 যোগক্ষম বিপরীতের অস্তিত্ব (Existence of additive inverse) যদি α একটি বাস্তব রাশি হয় তাহলে আমাদের দেখাতে হবে $\alpha + (-\alpha) = \overline{0}$

প্রমাণ ঃ যেহেতু α একটি বাস্তবরাশি অতএব মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে বলা যেতে পারে $\alpha \equiv (L_1, R_1)$, $-\alpha \equiv (L_2, R_2)$ এবং $\alpha + (-\alpha) \equiv (L, R)$। আমাদের দেখাতে হবে R বিভাগে '0' সর্বনিম্ন রাশি।

আমরা জানি L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে R_1 বিভাগে অবস্থিত ধনাত্মক রাশিগুলির বিয়োগাত্মক মান নিয়ে যে রাশিগুলি গঠিত হয় তাদের যোগফলে L বিভাগটি গঠিত হয় (একমাত্র R_1 বিভাগের সর্বনিম্ন রাশিটির বিয়োগাত্মক মান এখানে আমরা নেবো না)। ব্যাপারটি একটু বুঝিয়ে বলা দরকার। ধরা যাক $x \in L_1$ এবং $y (>0) \in R_1$ (সর্বনিম্ন নহে) তাহলে L বিভাগটি $x + (-y)$ অর্থাৎ $x - y$ জাতীয় রাশি নিয়ে গঠিত। সুতরাং বলা যেতে পারে L বিভাগের প্রত্যেকটি রাশিই ঋণাত্মক। এবার আমরা দেখাবো প্রত্যেকটি ঋণাত্মক মূলদরাশি L বিভাগে অবস্থান করে। ধরা যাক k একটি ঋণাত্মক মূলদরাশি। তাহলে আমরা এমন দুটি রাশি $x \in L_1$, $y \in R_1$ পাব যার ফলে $y - x = -k$ হবে, অথবা $x + (-y) = k$ $\Rightarrow k \in L_1$। উপরেল্লেখিত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা বলতে পারি R বিভাগে 0'ই সর্বনিম্ন রাশি। অর্থাৎ $\alpha + (-\alpha) = \overline{0}$

3·8 যোগ প্রক্রিয়ায় একান্বয়ে নিয়ম (Law of monotony for addition) α, β এবং γ তিনটি বাস্তব রাশি এবং $\alpha > \beta$ হলে প্রমাণ করতে হবে $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$।

প্রমাণ : যেহেতু α, β এবং γ তিনটি বাস্তবরাশি অতএব মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে এই রাশিগুলিকে সংজ্ঞায়িত করা যায়। ধরা যাক $\alpha \equiv (L_1, R_1)$, $\beta \equiv (L_2\ R_2)$ এবং $\gamma \equiv (L_3, R_3)$। তাছাড়া ধরা যাক $\alpha+\gamma \equiv (L',R')$ এবং $\beta+\gamma \equiv (L'', R'')$। এখন $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$ দেখাতে হলে আমাদের প্রমাণ করতে হবে L'' বিভাগের সমস্ত রাশিই L' বিভাগে অবস্থান করবে কিন্তু L' বিভাগে অন্ততঃ এমন একটি রাশি থাকবে যেটি L'' বিভাগে থাকবে না।

যেহেতু $\alpha+\gamma \equiv (L', R')$ সুতরাং বলা যেতে পারে L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L_3 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির যোগফলে L' বিভাগটি গঠিত হয়েছে অর্থাৎ $L' = \{x+y\ ;\ x \in L_1,\ y \in L_3\}$। অনুরূপ ভাবে বলা যায় L_2 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L_3 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির যোগফলে L'' বিভাগটি গঠিত। অর্থাৎ $L'' = \{a+b : a \in L_2, b \in L_3\}$।

যেহেতু $\alpha > \beta$, অতএব ধরা যাক $a_1 \in L_1$ কিন্তু $a_1 \notin L_2$ তাহলে $a_1 \in R_2$। তাছাড়া আমরা মনে করি $a_1' \in L_1$ এবং $a_1' > a_1$, মনে করা যাক $a_1' - a_1 = \epsilon$ (ϵ একটি অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশি)। আমরা জানি ϵ 'এর প্রতিষঙ্গী এরূপ দুটি রাশি $a_3 \in L_3$ এবং $b_3 \in R_3$ পাওয়া যায়, যার ফলে $b_3 - a_3 = \epsilon$ হবে।

এখন $a_1' + a_3 = a_1 + \epsilon + b_3 - \epsilon = a_1 + b_3$

কিন্তু $a_1' + a_3 \in L'$ আবার $a_1 + b_3 \in R'' \Rightarrow a + b_3 \notin L''$

অর্থাৎ আমরা দেখতে পেলাম L' বিভাগে অন্ততঃ এমন একটি রাশি পাওয়া যাচ্ছে যেটি L'' বিভাগে অবস্থান করে না। এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা বলতে পারি $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$.

3·9 বিভাগীকরণের একটি বৈশিষ্ট্য : যে কোন মূলদ রাশি $k > 1$ এবং একটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি (L,R) 'এর প্রতিষঙ্গী এমন দুটি ধনাত্মক রাশি $x \in L$, $y \in R$ পাওয়া যাবে যার ফলে $y/x = k$ হবে।

প্রমাণ ঃ ইচ্ছামত দুটি ধনাত্মক রাশি $a \in L$, $b \in R$ নেওয়া হোলো, এবং যেহেতু $k > 1$ $\therefore$ $k = 1 + d$ $(d > 0)$ ধরা হোলো। তাহলে আমরা এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণ রাশি n পাবো যার ফলে $n.ad > b - a$ হবে অর্থাৎ $a(nd+1) >, b$ হবে। এখন আমরা $a, ak, ak^2, \cdots\cdots ak^n$, রাশিমালার একটি সংহতি কল্পনা করি। যেহেতু $ak^n = a(1+d)^n > a\ (1+nd) > b \Rightarrow ak^n \in R$ এবার রাশিগুলি এমন ভাবে সাজানো হোলো যার ফলে $ak^r \in L$ এবং $ak^{r+1} \in R$ হয়। সুতরাং আমরা যদি $x = ak^r$ এবং $y = ak^{r+1}$ ধরি তাহলে $y/x = k$ হবে অর্থাৎ এক্ষেত্রে প্রদত্ত বৈশিষ্ট্যটি প্রমাণিত হোলো।

3·10 দুটি ধনাত্মক বাস্তব রাশির গুণফল (The product of two positive real numbers)।

ধরা যাক $\alpha_1 \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\alpha_2 \equiv (L_2, R_2)$ দুটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি। আমরা এমন একটি মূলদ রাশির বিভাগীকরণ (L, R) গঠন করবো যেটি α_1 এবং α_2 বাস্তব রাশিদ্বয়ের গুণফলে উদ্ভূত।

এখন (i) সমস্ত ঋণাত্মক মূলদরাশি, (ii) মূলদরাশি শূন্য, (iii) L_1 বিভাগের ধনাত্মক রাশি এবং L_2 বিভাগের ধনাত্মক রাশির গুণফলে উদ্ভূত ধনাত্মক রাশিগুলি নিয়ে L বিভাগটি গঠন করা হোলো। তাছাড়া অন্য সমস্ত রাশিগুলি নিয়ে R বিভাগটি গঠন করা হোলো। স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে L বিভাগটির অস্তিত্ব রয়েছে এবং সমস্ত মূলদরাশিই L বিভাগে অবস্থান করছে না।

ধরা যাক m একটি ধনাত্মক মূলদরাশি যেটি L বিভাগে অবস্থিত অন্য একটি মূলদরাশি n'এর চেয়ে ছোট। অর্থাৎ $m < n$ এবং $n \in L$; আমরা দেখাবো $m \in L$। ধরা যাক $n_1 \in L_1$ এবং $n_2 \in L_2$ এবং এই দুটি রাশির গুণফলে n গঠিত হয়েছে। অর্থাৎ $n = n_1 n_2$ তাছাড়া ; ধরা যাক $m/n = x$ তাহলে নিশ্চয়ই $0 < x < 1$ এবং $m = nx = (n_1 n_2)x = n_1(n_2 x)$ এখন $n_2 x < n_2 \Rightarrow n_2 x \in L_2$ (কারণ আমরা জানি নিম্ন বিভাগে অবস্থিত কোন রাশি অপেক্ষা ছোট রাশি ঐ নিম্ন বিভাগে অবস্থান করে) সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি m রাশিটি L_1 বিভাগস্থ একটি রাশি n_1 এবং L_2 বিভাগস্থ একটি রাশি $n_2 x$ এর গুণফহে উদ্ভূত রাশি। অতএব $m \in L$।

আবার যেহেতু L_1 বিভাগে এবং L_2 বিভাগে সর্বোচ্চ রাশি নেই অতএব L বিভাগেও সর্বোচ্চ রাশি নেই। সুতরাং L বিভাগটি (L,R) মূলদরাশির বিভাগীকরণের নিম্ন বিভাগ। উপরেল্লেখিত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা বলতে পারি (L,R) বিভাগীকরণটি (L_1,R_1) এবং (L_2,R_2) বিভাগীকরণদ্বয়ের গুণফলে উদ্ভূত। অর্থাৎ

$(L,R)=(L_1,R_1).(L_2,R_2)\equiv \alpha_1\alpha_2$ এবং মাঝের বিন্দুটি উঠিয়ে দিয়ে লিখলে দাঁড়ায়

$(L,R)=(L_1,R_1)(L_2R_2)\equiv \alpha_1\alpha_2$

3·11 গুণক্ষম অভেদের অস্তিত্ব (Existence of multiplicative identity)

α শূন্যহীন একটি বাস্তব রাশি। তাহলে প্রমাণ করা যায় $\alpha.\bar{1}=\alpha$

প্রমাণ : ধরা যাক $\alpha\equiv(L_1,R_1)$, $\bar{1}\equiv(L_2,R_2)$, $\alpha.\bar{1}\equiv(L,R)$

স্পষ্টতঃ এখানে দেখা যাচ্ছে R_2 বিভাগে 1'ই সর্বনিম্ন রাশি, সুতরাং L_2 বিভাগে সেই সমস্ত মূলদরাশি আছে যাদের প্রত্যেকটি এক থেকে ছোট। যেহেতু α শূন্য নয় অতএব (ক) α ধনাত্মক রাশি হতে পারে অথবা (খ) α ঋণাত্মক রাশি হতে পারে।

(ক) α যখন ধনাত্মক রাশি।

এখন $\alpha.\bar{1}=\alpha$ প্রমাণ করতে গেলে আমরা দেখাবো L এবং L_1 অভিন্ন। অভিন্ন সম্পর্কটি প্রমাণ করতে গেলে আমরা দেখাবো (i) $L\subseteq L_1$ অর্থাৎ L বিভাগের প্রত্যেকটি সদস্যই L_1 বিভাগে আছে। (ii) $L_1\subseteq L$ অর্থাৎ L_1 বিভাগের প্রত্যেকটি সদস্যই L বিভাগে আছে।

(i) ধরা যাক L_1 বিভাগে a_1 একটি ধনাত্মক রাশি এবং $a_2\in L_2$ তাহলে L বিভাগটির গঠন প্রণালী থেকে স্পষ্টই বলা যায় $a_1a_2\in L$ এখন $a_1a_2 < a_1.1=a_1$ কিন্তু আমরা জানি $a_1\in L_1$ অতএব $a_1a_2\in L_1$ (যেহেতু আমরা জানি যে কোন মূলদরাশি নিম্ন বিভাগস্থ যে কোন রাশি অপেক্ষা ছোট হলে ঐ নিম্ন বিভাগেই অবস্থান করবে), এই আলোচনা থেকে বলা যায় $a_1a_2\in L\Rightarrow a_1a_2\in L_1$ অর্থাৎ $L\subseteq L_1$।

(ii) ধরা যাক a_1 একটি ধনাত্মক রাশি যেটি L_1 বিভাগে আছে। যেহেতু L_1 বিভাগটি (L_1,R_1) মূলদরাশির বিভাগীকরণের নিম্ন বিভাগ সুতরাং নিম্ন বিভাগের গঠন প্রণালী থেকে বলা যায় L_1 বিভাগে অন্তত পক্ষে এমন একটি রাশি a_2 পাওয়া যেতে পারে যেটি a_1 অপেক্ষা বড় অর্থাৎ

$a_2 \in L_1$ এবং $a_2 > a_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} < 1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \in L_2$

এখন $a_1 = a_2 . (a_1/a_2)$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে a_1 রাশিটি L_1 বিভাগের সদস্য a_2 এবং L_2 বিভাগের সদস্য a_1/a_2 'র গুণফলে উদ্ভূত এবং এথেকে আমরা সহজেই বলতে পারি $a_1 \in L$ অর্থাৎ $L_1 \subseteq L$. এখন (i) এবং (ii) ক্ষেত্র দুটি থেকে বলতে পারি L_1 এবং L অভিন্ন অর্থাৎ $\alpha.\bar{1} = \alpha$.

(খ) যখন α ঋণাত্মক বাস্তবরাশি

α ঋণাত্মক বাস্তবরাশি হেতু $-\alpha$ ধনাত্মক

অর্থাৎ $(-\alpha).\bar{1} = (-\alpha)$ [(ক) 'এর প্রমাণের মতো].

$$\begin{aligned} \text{এখন } \alpha.\bar{1} &= -[(-\alpha).\bar{1}] \\ &= -(-\alpha) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

3'12 গুণনক্ষম বিপরীতের অস্তিত্ব (Existence of multiplicative inverse of a non-zero real number).

ধরা যাক, α একটি ধনাত্মক বাস্তবরাশি

এবং $\alpha \equiv (L_1,R_1)$ তাছাড়া $\beta \equiv (L, R)$

এবং $L = \{x : x \leq 0$ বা $x = 1/y$, $y \in R_1$ কিন্তু y কখনই R_1 বিভাগের সর্বনিম্ন রাশি নয় $\}$

আমাদের প্রমাণ করতে হবে $\alpha.\beta = \bar{1}$

ধরা যাক, $\alpha.\beta \equiv (L',R')$, তাছাড়া ধরা যাক ধনাত্মক রাশি $x_1 \in L_1$ এবং ধনাত্মকরাশি $\frac{1}{y_1} \in L$; সুতরাং L' এর গঠন প্রণালী থেকে স্পষ্টই বলা যায় L' এর ধনাত্মক সদস্যগুলি x_1/y_1 জাতীয় হবে। আবার

$y_1 \in R_1 \Rightarrow y_1 > x_1 \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} < 1$ অর্থাৎ এথেকে আমরা বলতে পারি L' এর প্রত্যেকটি সদস্যই এক থেকে ছোট।

আবার ধরা যাক k যে কোন একটি ধনাত্মক মূলদ রাশি এবং একের চেয়ে ছোট। তাহলে নিশ্চয়ই আমরা এমন দুটি ধনাত্মক রাশি $x_2 \in L_1$, $y_2 \in R_1$ পাব যার ফলে $\frac{x_2}{y_2} = k$ হবে। যেহেতু $k = x_2\left(\frac{1}{y_2}\right)$

সুতরাং আমরা বলতে পারি একের চেয়ে ছোট প্রত্যেকটি মূলদরাশি L' বিভাগে অবস্থান করবে। অর্থাৎ $L' = \{x : x < 1\}$ এবং R''এ সর্বনিম্ন রাশি এক অবস্থান করে। অতএব $(L', R') \equiv \bar{1}$ অর্থাৎ $\alpha.\beta = \bar{1}$.

α ঋণাত্মক রাশি হলে $-\alpha$ ধনাত্মক রাশি। তাহলে আমরা এমন একটি ধনাত্মক রাশি γ পাব যার ফলে $(-\alpha).\gamma = \bar{1}$ হবে। যেহেতু α এবং $(-\gamma)$ উভয়েই ঋণাত্মক রাশি অতএব $\alpha(-\gamma) = (-\alpha)\gamma = \bar{1}$

$\therefore$ $-\gamma$ এক্ষেত্রে α বাস্তবরাশিটির গুণক্ষম বিপরীত। এখন আমরা গুণনক্ষম বিপরীতের অদ্বিতীয়ত্ব প্রমাণ করবো। ধরা যাক β এবং γ রাশিদ্বয় α রাশিটির দুটি গুণনক্ষম বিপরীত রাশি এবং এরা শূন্য নয়। তাহলে

$$\alpha.\beta = \bar{1} = \alpha.\gamma.$$

এখন $(\beta\alpha)\gamma = (\alpha\beta)\gamma = \bar{1}\gamma = \gamma.$

এবং $(\beta\alpha)\gamma = \beta(\alpha\gamma) = \beta\bar{1} = \beta.$

অতএব $\beta = \gamma.$

3·13 গুণন ক্রিয়ায় একান্বয়ে নিয়ম (Monotony Law)

ধরা যাক α, β এবং γ তিনটি ধনাত্মক বাস্তবরাশি এবং $\alpha < \beta$

প্রমাণ করতে হবে $\alpha\gamma < \beta\gamma$

প্রমাণঃ ধরা যাক α, β এবং γ তিনটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি অতএব এগুলিকে মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

ধরা যাক $\alpha \equiv (L^1, R^1)$, $\beta \equiv (L^2, R^2)$ এবং $\gamma \equiv (L^3, R^3)$

তাছাড়া $\alpha\gamma \equiv (L_1, R_1)$, $\beta\gamma = (L_2, R_2)$

এখানে L^1 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L^3 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির গুণফলে L_1 বিভাগটি গঠিত হয়েছে এবং L^2 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির সঙ্গে L^3 বিভাগের প্রত্যেকটি রাশির গুণফলে L_2 বিভাগটি গঠিত হয়েছে। স্বভাবতই L_1 এবং L_2 বিভাগে সমস্ত ঋণাত্মক মূলদরাশি এবং মূলদরাশি শূন্য (0) অবস্থান করে। আমরা দেখাবো $L_1 \subset L_2$.

যেহেতু $\alpha < \beta \Rightarrow L^1 \subset L^2$ অতএব $L_1 \subset L_2$

এবার দেখাবো L_2 বিভাগে এমন একটি রাশি অবস্থান করে যেটি L_1 বিভাগে অবস্থান করে না।

ধরা যাক L^2 বিভাগে a_2 ধনাত্মক রাশিটি অবস্থান করে কিন্তু এটি L^1 বিভাগে অবস্থান করে না। নিম্ন বিভাগের সংজ্ঞানুযায়ী আমরা বলতে পারি L^2 বিভাগে কোন সর্বোচ্চ রাশি নেই এবং সেইহেতু L^2 বিভাগে আমরা দ্বিতীয় একটি ধনাত্মক রাশি $a_2' > a_2$ নিতে পারি। তাহলে দেখা যাচ্ছে a_2 এবং a_2' উভয়েই R_1 বিভাগে অবস্থান করে। ধরা যাক $a_2'/a_2 = k$, তাহলে $k > 1$.

L^3 এবং R^3 বিভাগে দুটি ধনাত্মক রাশি a_3 এবং b_3 পাওয়া যাবে যার ফলে $b_3/a_3 = k$ হবে।

এখন $a_2' a_3 = a_2 k a_3 = a_2 b_3$

যেহেতু a_2' রাশিটি L^2 বিভাগের ধনাত্মক রাশি এবং a_3 রাশিটি L^3 বিভাগের ধনাত্মক রাশি অতএব $a_2'a_3$ অথবা a_2b_3 রাশিটি L_2 বিভাগে অবস্থান করবে। আবার $a_2 \in R^1$ এবং $b_3 \in R^3$ অতএব $a_2b_3 \in R_1$ $\Rightarrow a_2b_3 \notin L_1$ অতএব L_1 বিভাগটি L_2 বিভাগটির একটি যথার্থ (proper) অংশ। এ থেকে আমরা বলতে পারি $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

আবার α এবং β উভয়ে ঋণাত্মক বাস্তব রাশি হলে $-\alpha$, $-\beta$ ধনাত্মক বাস্তব রাশি হবে।

এখন যেহেতু $\alpha < \beta \Rightarrow -\alpha > -\beta$, বা, $-\beta < -\alpha$.

$$\Rightarrow -\beta\gamma < -\alpha\gamma$$

বা, $-(-\beta\gamma) > -(-\alpha\gamma)$

বা, $\beta\gamma > \alpha\gamma$.

যদি α ঋণাত্মক বাস্তবরাশি হয় এবং β ধনাত্মক বাস্তবরাশি হয় তাহলে $\alpha\gamma$ ঋণাত্মক বাস্তব রাশি এবং $\beta\gamma$ ধনাত্মক বাস্তব রাশি হবে (মনে রাখা প্রয়োজন যে এখানে γ একটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি). তাহলে সহজেই বলা যায় $\alpha\gamma < \beta\gamma$; যদি $\alpha<\beta$ হয় এবং γ ঋণাত্মক বাস্তব রাশি হয় তাহলে $\alpha\gamma > \beta\gamma$, হবে।

γ ঋণাত্মক বাস্তব রাশি $\Rightarrow -\gamma$ ধনাত্মক রাশি।

এখন $\alpha(-\gamma) < \beta(-\gamma)$

বা, $-(\alpha\gamma) < -(\beta\gamma)$

বা, $-[-(\alpha\gamma)] > -[-(\beta\gamma)]$

অর্থাৎ $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

3·14 বিতরক নিয়ম (Distributive law) :

যদি α, β এবং γ তিনটি বাস্তব রাশি হয় তাহলে প্রমাণ করতে হবে $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

প্রমাণঃ গুণনের ক্ষেত্রে বিতরক নিয়ম দেখাতে গেলে আমরা চারিটি ঘটনার সম্মুখীন হবো। (ক) α, β এবং γ প্রত্যেকটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি হতে পারে। (খ) α এবং β দুটিই ধনাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু γ ঋণাত্মক বাস্তব রাশি হতে পারে। (গ) α ধনাত্মক বাস্তর রাশি কিন্তু β এবং γ উভয়েই ঋণাত্মক বাস্তব রাশি হতে পারে। (ঘ) α ঋণাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু β এবং γ বাস্তব রাশিদ্বয় ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

ধরা যাক $\alpha\equiv(L_1,R_1)$, $\beta\equiv(L_2,R_2)$ এবং $\gamma\equiv(L_3,R_3)$.

তাছাড়া ধরা যাক $\alpha(\beta+\gamma)\equiv(L,R)$, $\alpha\beta+\alpha\gamma=(L',R')$

(ক) α, β এবং γ প্রত্যেকটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি হলে L এবং L' বিভাগ দুটিতে সমস্ত ঋণাত্মক মূলদরাশি এবং শূন্য অবস্থান করবে তাছাড়া $x_1(x_2+x_3)$ জাতীয় ধনাত্মক রাশি L বিভাগে থাকবে এবং $x_1x_2+x_1'x_3$ জাতীয় ধনাত্মক রাশি L' বিভাগে থাকবে। তবে মনে রাখা প্রয়োজন যে $x_1, x_1'\in L_1$, $x_2\in L_2$, $x_3\in L_3$ এবং এদের প্রত্যেকটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি। যেহেতু $x_1(x_2+x_3)=x_1x_2+x_1x_3$ অতএব $x_1=x_1'$ ধরলে আমরা সহজেই বলতে পারি $L\subseteq L'\cdots\cdots(1)$

L' বিভাগের যে কোন সদস্য ধরা যাক $x_1x_2+x_1'x_3$ L বিভাগের সদস্য হবে যদি $x_1'=x_1$ ধরা যায়।

ধরা যাক $x_1 > x_1'$ তাহলে $x_1 > x_1' \Rightarrow x_1'/x_1 < 1$

$\therefore \quad x_1'x_3 = x_1\{(x_1'/x_1)x_3\} = x_1x_3'$ (ধরা যাক).

তাহলে $x_3' = (x_1'/x_1)x_3 < 1.x_3 = x_3$.

অর্থাৎ $x_3' \in L_3$.

আবার $x_1x_2+x_1'x_3 = x_1x_2+x_1x_3' = x_1(x_2+x_3')$

অর্থাৎ $L' \subseteq L \cdots\cdots$ (2)

এখন (1) এবং (2) 'এর সাহায্যে বলা যায় $L=L'$ এবং এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায়

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

(খ) যখন α এবং β উভয়েই ধনাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু γ ঋণাত্মক বাস্তব রাশি।

এক্ষেত্রে তিনটি সম্ভাবনা দেখা যায়,

(i) $\beta+\gamma=0$ অর্থাৎ $\beta=-\gamma$

তাহলে $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha.0=0$

এবং $\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha\beta+\alpha(-\beta)=\alpha\beta-\alpha\beta=0$

$\therefore \quad \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

(ii) $\beta+\gamma>0$ তাহলে

$$\begin{aligned}\alpha\beta=\alpha(\beta+0) &= \alpha\{\beta+[\gamma+(-\gamma)]\}\\ &=\alpha\{(\beta+\gamma)+(-\gamma)\}\\ &=\alpha(\beta+\gamma)+\alpha(-\gamma)\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta-\alpha(-\gamma)$ [যেহেতু $\beta+\gamma>0$ এবং $-\gamma>0$]

$$=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

(iii) $\beta+\gamma<0$ তাহলে $-(\beta+\gamma)>0$

বা $(-\beta)+(-\gamma)>0$

আমরা দেখতে পাচ্ছি

$$\alpha\{(-\beta)+(-\gamma)\}=\alpha(-\beta)+\alpha(-\gamma) \quad \cdots \quad [\text{(ii) থেকে}]$$

অতএব $\alpha(\beta+\gamma)=-\alpha\{[-(\beta+\gamma)]\}$

$$=-\alpha\{(-\beta)+\alpha(-\gamma)\}$$
$$=-\alpha(-\beta)+(-\alpha)(-\gamma)$$
$$=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

(গ) α ধনাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু β এবং γ ঋণাত্মক বাস্তব রাশি তাহলে $\alpha.(\beta+\gamma)=-\{\alpha[-(\beta+\gamma)]\}$

$$=-(-\alpha\beta-\alpha\gamma)$$
$$=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

(ঘ) α ঋণাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু β এবং γ যে কোন ধরণের বাস্তব রাশি (এক্ষেত্রে ঋণাত্মক বাস্তব রাশির কথাই বলা হয়েছে) এখন

$$\alpha(\beta+\gamma)=-\{(-\alpha)(\beta+\gamma)\}$$
$$=-\{(-\alpha)\beta+(-\alpha)\gamma\}$$
$$=-(-\alpha)\beta-(-\alpha)\gamma$$
$$=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

উপরেল্লেখিত আলোচনা থেকে স্পষ্টই বলা যায়

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

3·15 গুণনের বিনিময় নিয়ম (Commutative law) **ঃ**

α এবং β দুটি বাস্তব রাশি তাহলে প্রমাণ করতে হবে $\alpha\beta=\beta\alpha$.

প্রমাণ ঃ এটি প্রমাণ করতে গেলে আমরা চারিটি ঘটনার সম্মুখীন হবো।

(ক) α এবং β উভয়েই ধনাত্মক রাশি।

ধরা যাক $\alpha\equiv(L_1, R_1)$; $\beta\equiv(L_2, R_2)$ এবং $\alpha\beta\equiv(L, R)$

তাহলে $L=\{x : x\leq 0$ বা $x=x_1x_2, 0<x_1\in L_1, 0<x_2\in L_2\}$

আবার ধরা যাক $\beta\alpha\equiv(L', R')$ তাহলে

$$L'=\{x : x\leq 0 \text{ বা } x=x_2x_1,\ 0<x_1\in L_1,\ 0<x_2\in L_2\}$$

কিন্তু যেহেতু $x_2 x_1 = x_1 x_2$

অতএব $L = L' \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$.

(খ) α ধনাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু β ঋণাত্মক বাস্তব রাশি, যেহেতু β ঋণাত্মক অতএব $-\beta$ ধনাত্মক বাস্তব রাশি।

এখন $\alpha\beta = -[\alpha(-\beta)]$
$= -[(-\beta)\alpha]$
$= \beta\alpha$.

(গ) α ঋণাত্মক কিন্তু β ধনাত্মক বাস্তব রাশি

এখানে $\alpha\beta = -[(-\alpha)\beta]$
$= -[\beta(-\alpha)]$
$= \beta\alpha$.

(ঘ) α এবং β উভয়েই ঋণাত্মক বাস্তব রাশি।

$\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$
$= (-\beta)(-\alpha)$
$= \beta\alpha$.

উপরে আলোচিত ঘটনাসমূহের ফলাফল থেকে আমরা বলতে পারি

$\alpha.\beta = \beta.a$.

3·16 গুণনের সংযোগ নিয়ম (Associative law)

α, β এবং γ তিনটি বাস্তব রাশি। তাহলে প্রমাণ করতে হবে

$\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma$.

প্রমাণ : ধরা যাক $\alpha \equiv (L_1, R_1)$, $\beta \equiv (L_2, R_2)$ এবং $\gamma \equiv (L_3, R_3)$। তাছাড়া ধরা যাক $\alpha.(\beta.\gamma) \equiv (L, R)$

এখানে $L = \{x : x \leq 0$ বা $x = x_1.(x_2.x_3)$; $0 < x_1 \in L_1$
$0 < x_2 \in L_2$ এবং $0 < x_3 \in L_3\}$
$= \{x : x \leq 0$ বা $(x_1.x_2)x_3$; $0 < x_1 \in L_1$,
$0 < x_2 \in L_2$ এবং $0 < x_3 \in L_3\}$
$= L'$

এখানে L' হচ্ছে $(\alpha.\beta).\gamma \equiv (L', R')$ বিভাগীকরণের নিম্ন বিভাগ অতএব আমরা দেখতে পাচ্ছি L এবং L' অভিন্ন।

সুতরাং $\alpha.(\beta,\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma.$

উপসিদ্ধান্ত 1 ধরা যাক α ধনাত্মক রাশি কিন্তু β ঋণাত্মক রাশি তাহলে এক্ষেত্রে $-\beta$ ধনাত্মক।

সুতরাং $\alpha.\beta = -[\alpha\,(-\beta)]$

উপসিদ্ধান্ত 2 ধরা যাক β ধনাত্মক রাশি কিন্তু α ঋণাত্মক রাশি এক্ষেত্রে $-\alpha$ ধনাত্মক রাশি।

অতএব $\alpha.\beta = -[(-\alpha)\,\beta]$

উপসিদ্ধান্ত 3 ধরা যাক α এবং β উভয়েই ঋণাত্মক রাশি। এক্ষেত্রে $-\alpha$ এবং $-\beta$ উভয়েই ধনাত্মক রাশি।

অতএব $\alpha.\,\beta = (-\alpha)(-\beta)$

উপসিদ্ধান্ত 4 হয় $\alpha = 0$ অথবা $\beta = 0$ অথবা α এবং β উভয়েই শূন্য।

সংজ্ঞানুযায়ী বলা যায় $\alpha\,\beta = \bar{O}$।

3·17 তত্ত্ব 2 : যদি a এবং b দুটি মূলদরাশি হয় তাহলে

(i) $a < b$ হ'লে $\bar{a} < \bar{b}$ হবে

(ii) $a = b$ হ'লে $\bar{a} = \bar{b}$ হবে

(iii) $a > b$ হ'লে $\bar{a} > \bar{b}$ হবে

প্রমাণ (i) যেহেতু $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$ বাস্তব মূলদরাশি অতএব

$$\bar{a} \equiv (L_1, R_1) \text{ এবং } \bar{b} \equiv (L_2, R_2)$$

সংজ্ঞানুযায়ী আমরা বলতে পারি R_1 বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি হবে a এবং R_2 বিভাগে সর্বনিম্ন রাশি হচ্ছে b।

এখন $\bar{a} < \bar{b}$ দেখাতে গেলে আমরা প্রমাণ করবো $L_1 \subset L_2$.

ধরা যাক x একটি মূলদরাশি এবং $x < a$.

যেহেতু $a < b$ এবং $x < a < b$ অর্থাৎ $x < b$.

অতএব $x \in L_2$ এ থেকে আমরা বলতে পারি

L_1-স্থিত প্রতিটি রাশিই L_2-বিভাগে অবস্থান করে।

আবার যে কোন একটি মূলদরাশি ধরা যাক y নেওয়া হলো এবং $a < y < b$.

$a < y < b$ ধরার জন্য আমরা বলতে পারি $y \in L_2$ কিন্তু $y \notin L_1$

(i) এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায় $L_1 \subset L_2$

অর্থাৎ $\bar{a} < \bar{b}$

(ii) $a > b$ হবার অর্থই $b < a$ আমরা দেখাবো $\bar{b} < \bar{a}$

(i) এর মত করে আমরা প্রমাণ করতে পারি $\bar{b} < \bar{a}$

অর্থাৎ $\bar{a} > \bar{b}$

(iii) $a = b$ এটি স্বাভাবিকভাবেই প্রমাণ করা যায়।

3·18 তত্ত্ব 3 ঃ যদি a এবং b দু'টি মূলদরাশি হয় তাহলে প্রমাণ করুন
$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}.$$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $\bar{a} \equiv (L_1, R_1)$, $\bar{b} \equiv (L_2, R_2)$, এবং
$$\overline{a+b} \equiv (L, R)$$

স্পষ্টতই বোঝা যাচ্ছে R_1 বিভাগে a সর্বনিম্ন রাশি এবং R_2 বিভাগে b সর্বনিম্ন রাশি আমাদের দেখাতে হবে R বিভাগে $a+b$ সর্বনিম্ন রাশি।

ধরা যাক $x \in L_1$ এবং $y \in R_1$ সুতরাং আমরা বলতে পারি $x+y \in L$ তাছাড়া $x < a$ এবং $y < b \Rightarrow x+y < a+b$.

অর্থাৎ L বিভাগে সমস্ত রাশি $a+b$ 'র থেকে ছোট।

ধরা যাক $a+b-k$ একটি রাশি যেটি $a+b$'র চেয়ে ছোট (এখানে $k > 0$) তাহলে $a+b-k=(a-\frac{1}{2}k)+(b-\frac{1}{2}k)$.

যেহেতু $a-\frac{1}{2}k \in L_1$, $b-\frac{1}{2}k \in L_2$ অতএব $a+b-k \in L$. এ থেকে আমরা পেলাম প্রতিটি মূলদরাশি যেটি $a+b$ 'র চেয়ে ছোট সেটি L বিভাগে থাকবে।

অর্থাৎ R বিভাগে $a+b$ 'ই সর্বনিম্ন রাশি।

অতএব $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$.

3·19 তত্ত্ব 4 : ধরা যাক α এবং β দুটি প্রদত্ত রাশি। তাহলে একটি মাত্র বাস্তবরাশি x পাওয়া যাবে যার ফলে $\alpha+x=\beta$ হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক আমরা এমন একটি বাস্তব রাশি x পেতে পারি যার ফলে $\alpha+x=\beta$ হয়

$$\therefore \quad (-\alpha)+(\alpha+x)=(-\alpha)+\beta$$
$$[(-\alpha)+\alpha]+x=(-\alpha)+\beta$$
$$[(-\alpha)+\alpha]+x=\beta+(-\alpha)$$
$$[(\alpha)-\alpha]+x=\beta+(-\alpha)$$
$$\bar{0}+x=\beta-(-\alpha)$$
$$x=\beta+(-\alpha)$$
$$=\beta-\alpha.$$

তাছাড়া আমরা দেখাবো যে $x=\beta-\alpha$ প্রদত্ত সমীকরণটি এক্ষেত্রে সিদ্ধ হয়

$$\alpha+(\beta-\alpha)=\alpha+[\beta+(-\alpha]$$
$$=\alpha+[(-\alpha)+\beta]$$
$$=[-\alpha+(-\alpha)]+\beta$$
$$=\bar{0}+\beta$$
$$=\beta+\bar{0}$$
$$=\beta.$$

3·20 তত্ত্ব 5 : $\alpha>\beta$ হয় তাহলে $-\alpha<-\beta$

প্রমাণ : $\alpha>\beta$

$$\therefore \quad \text{যদি } \alpha+(-\alpha)>\beta+(-\alpha)$$
$$\bar{0}>\beta+(-\alpha)$$
$$(-\beta)+\bar{0}>(-\beta)+[\beta+(-\alpha)]$$
$$(-\beta)+\bar{0}>[(-\beta)+\beta]+(-\alpha)$$

$$(-\beta)+\bar{0} > \bar{0}+(-\alpha)$$
$$(-\beta)+\bar{0} > (-\alpha)+\bar{0}$$
$$\therefore \quad -\beta > -\alpha$$

3·21 তত্ত্ব 6 ঃ a এবং b দুটি মূলদরাশি, তাহলে প্রমাণ করুন $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ ।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $\bar{a} \equiv (L_1, R_1)$, $\bar{b} \equiv (L_2, R_2)$, $\overline{ab} \equiv (L, R)$ ধরা যাক a এবং b উভয়েই ধনাত্মক মূলদরাশি। বিভাগীকরণের নিয়মানুযায়ী R_1 বিভাগে a'ই সর্বনিম্নরাশি, এবং R_2 বিভাগে b'ই সর্বনিম্নরাশি। আমরা দেখাবো R বিভাগে ab'ই সর্বনিম্নরাশি। ধরা যাক $x \in L_1$ এবং $y \in L_2$ এবং $x > \bar{0}$, $y > \bar{0}$

সুতরাং $xy \in L$ এবং $xy > 0$

তাছাড়া আমরা বলতে পারি $x < a$ এবং $y < b$

অতএব $xy < ab$.

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি L বিভাগের সব রাশিই ab'র চেয়ে ছোট।

এবারে আমরা এমন একটি মূলদরাশি abk নিচ্ছি যেটি ab'র চেয়ে ছোট। মনে রাখা দরকার $k < 1$.

এখন $k = \frac{1+k}{2} \cdot \frac{2k}{1+k}$.

যেহেতু $k < 1$ অতএব $\frac{1+k}{2}$ এবং $2k/(1+k)$ উভয়েই একের চেয়ে ছোট।

আমরা জানি $abk = \left(a\frac{1+k}{2}\right) \cdot \left(b\frac{2k}{1+k}\right)$

যেহেতু $a\frac{(1+k)}{2} < a$ এবং $b. \frac{2k}{1+k} < b$ অতএব

$a\frac{(1+k)}{2} \in L_1$ এবং $b\frac{2k}{1+k} \in L_2$ এবং আমরা সহজেই বলতে পারি $abk \in L$.

অতএব আমরা পেলাম যে সমস্ত মূলদরাশি ab 'র চেয়ে ছোট সেগুলি L বিভাগে অবস্থান করে।

অতএব R বিভাগে ab 'ই সর্বনিম্নরাশি।

অতএব $\bar{a}\bar{b}=\overline{ab}$.

অনুরূপভাবে আমরা বলতে পারি a এবং b উভয়েই ঋণাত্মক মূলদরাশি হলেও $\bar{a}\bar{b}=\overline{ab}$ হবে।

অথবা a এবং b এর মধ্যে যে কোন একটি ঋণাত্মক মূলদরাশি হলেও $\bar{a}\bar{b}=\overline{ab}$ হবে।

চতুর্থ অধ্যায়

ক্যাণ্টরের তত্ত্ব (Cantor's Theory)

আমরা পূর্বেই বাস্তব রাশির সংজ্ঞা এবং এ সম্পর্কে ডেডেকিণ্ডের তত্ত্ব নিয়ে আলোচনা করেছি। বর্তমান অধ্যায়ে বাস্তব রাশি সম্পর্কে ক্যাণ্টরের তত্ত্ব নিয়ে আলোচনা করবো। এবং তারপর বাস্তব রাশির কয়েকটি বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করবো।

4·1 জর্জ ক্যাণ্টর বাস্তব রাশির সংজ্ঞা দিতে গিয়ে মূলদরাশির সুষম অনুক্রমের (regular sequence) সাহায্য নিয়েছেন। তিনি বলেছেন

(ক) কোন মূলদরাশির (p/q এই বিধিতে যে সব রাশি সংজ্ঞায়িত হয়ে থাকে) সুষম অনুক্রম ধরা যাক $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots$ এর জন্য একটি মাত্র রাশি পাওয়া যাবে, যাকে বাস্তব রাশি বলা হয় এবং এই রাশিটিকে a দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(খ) $x, x, x, \cdots$ অনুক্রমটি সর্বদাই অভিসারী এবং বাস্তব রাশি হিসাবে সংজ্ঞায়িত হয়ে থাকে। এটি মূলদরাশি x এর প্রতিষঙ্গী।

(গ) $\{a_n\}$ সুষম অনুক্রমের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত বাস্তব রাশি a এবং $\{b_n\}$ সুষম অনুক্রমের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত বাস্তব রাশি b 'এর মধ্যে ক্রমিক সম্পর্ক নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া হয়ে থাকে ঃ

(i) যদি ইচ্ছানুরূপ অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশি ϵ-এর প্রতিষঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n পাওয়া যায় যার ফলে $|a_{n+p} - b_{n+p}| < \epsilon$ হয় তাহলে $a = b$ বলা হবে। মনে রাখা প্রয়োজন $p = 1, 2, 3, \cdots$

(ii) n এর নির্দিষ্ট মান বা নির্দিষ্ট মানের পর থেকে যদি বিচার করা হয় এবং তার ফলে $a_{n+p} - b_{n+p}$ যদি সর্বদাই ঋণাত্মক হয় এবং এই পার্থক্যের পরম মান (absolute value) কোন সুনির্দিষ্ট রাশি K'এর থেকে বড় হয় তবে $a < b$ বলা হবে।

(iii) n 'এর নির্দিষ্ট মান বা তার পরবর্তী মানের জন্য $a_{n+p} - b_{n+p}$ সর্বদাই ধনাত্মক হয় এবং কোন সুনির্দিষ্ট রাশি M অপেক্ষা বড় হয় তাহলে $a > b$ বলা হবে।

(iv) $\{a_n\}$ সুষম অনুক্রমের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত a বাস্তব রাশি এবং $\{b_n\}$ সুষম অনুক্রমের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত b বাস্তব রাশি দ্বারা $(a+b)$, $(a-b)$, ab, a/b এবং a^b কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

(i′) $\{a_n+b_n\}$ অনুক্রমটি অভিসারী হলে $a+b$ 'কে a এবং b এর যোগফল বলে ধরা হবে।

(ii′) $\{a_n-b_n\}$ অনুক্রমটি অভিসারী হলে $a-b$ 'কে a এবং b এর বিয়োগফল বলে ধরা হবে।

(iii′) $\{a_nb_n\}$ অনুক্রমটি অভিসারী হলে ab 'কে a এবং b এর গুণফল বলে ধরা হবে।

(iv′) $\{a_n/b_n\}$ অনুক্রমটি অভিসারী হলে a/b 'কে a এবং b এর ভাগফল বলে ধরা হবে। মনে রাখা প্রয়োজন $\{b_n\}$ অনুক্রমটির প্রত্যেকটি রাশিই কোন ধনাত্মক রাশির চেয়ে বড় হবে।

(v′) $\{a_n{}^{b_n}\}$ অনুক্রমটি অভিসারী হলে a^b 'কে সংজ্ঞায়িত করে।

(ঙ) যদি $\{a_n\}$ অনুক্রমটির প্রতিসঙ্গী এমন একটি মূলদ রাশি x পাওয়া যায় যার ফলে $\{a_n-x\}$ অনুক্রমটিকে 0 দ্বারা নিরূপণ করা যায় তাহলে সেক্ষেত্রে $\{a_n\}$ অনুক্রমটি একটি বাস্তব রাশিকে নিরূপণ করবে এবং এই বাস্তব রাশিটি এবং x মূলদরাশিটি অভিন্ন। কিন্তু যদি ঠিক এভাবে নিরূপিত না হয় তাহলে ঐ বাস্তব রাশিটিকে অমূলদ রাশি বলা হবে।

4·2 ধনাত্মক বাস্তব রাশি, ঋণাত্মক রাশি এবং শূন্য ঃ

এখানে উপরেল্লেখিত তত্ত্বের সাহায্যে আমরা ধনাত্মক বাস্তব রাশি, ঋণাত্মক বাস্তব রাশি এবং শূন্যের সংজ্ঞা দেব।

(i) যদি কোন মূলদরাশির অনুক্রম $\{a_n\}$ কোন বাস্তব রাশিকে নিরূপণ করে এবং ঐ অনুক্রমের কোন নির্দিষ্ট সদস্য ধরা যাক a_n 'এর পর থেকে সমস্ত সদস্যই নির্দিষ্ট কোন ধনাত্মক মূলদ রাশি δ 'র চেয়ে বড় হয় তাহলে ঐ বাস্তব রাশিটিকে ধনাত্মক বাস্তব রাশি বলা হবে।

(ii) যদি কোন মূলদরাশির অনুক্রম $\{a_n\}$ কোন বাস্তব রাশিকে নিরূপণ করে এবং ঐ অনুক্রমের কোন নির্দিষ্ট সদস্য ধরা যাক a_n 'এর পর থেকে সমস্ত সদস্যই ঋণাত্মক হয় এবং এগুলির প্রত্যেকটির পরম মান (absolute

value) কোন ধনাত্মক মূলদ রাশি δ'র চেয়ে বড় হয় তাহলে ঐ বাস্তব-রাশিটিকে ঋণাত্মক বাস্তব রাশি বলা হবে।

(iii) যদি $\{a_n\}$ মূলদরাশির অনুক্রমটির প্রত্যেকটি সদস্য কোন নির্দিষ্ট সদস্য ধরা যাক a_n 'এর পর থেকে কোন অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশি ϵ থেকে ক্ষুদ্র হয় তাহলে ঐ $\{a_n\}$ মূলদরাশির অনুক্রমটি 0 (শূন্য) বাস্তব রাশিটিকে সংজ্ঞায়িত করবে।

4·3. কয়েকটি বৈশিষ্ট্য :

যদি $\{a_n\}$ এবং $\{\alpha_n\}$ অনুক্রমদ্বয় একই বাস্তব রাশি a 'কে নিরূপণ করে এবং ভিন্ন দুটি অনুক্রম $\{b_n\}$ এবং $\{\beta_n\}$ ভিন্ন একটি বাস্তব রাশি b'কে নিরূপণ করে। তাহলে

(ক) $\{a_n \pm b_n\}$ বা $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ অনুক্রম দ্বারা $a \pm b$ বাস্তব রাশিটিকে নিরূপণ করা যায়।

(খ) $\{a_n b_n\}$ বা $\{\alpha_n \beta_n\}$ অনুক্রম দ্বারা ab বাস্তব রাশিটিকে নিরূপণ করা যায়।

(গ) $\{a_n/b_n\}$ বা $\{\alpha_n/\beta_n\}$ অনুক্রম দ্বারা a/b বাস্তব রাশিকে নিরূপণ করা যায়। অবশ্য এখানে মনে রাখা প্রয়োজন $b \neq 0$

প্রমাণ : ধরা যাক m যে কোন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n \geq m$, তাছাড়া অতি ক্ষুদ্র অথচ পছন্দমত যে কোন ধনাত্মক রাশি ϵ নিলাম তাহলে

$$|(a_{n+p} \pm b_{n+p}) - (\alpha_{n+p} \pm \beta_{n+p})|$$
$$\leq |a_{n+p} - \alpha_{n+p}| + |b_{n+p} - \beta_{n+p}|$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{}{2} = \epsilon$$

যেহেতু $\{a_n\}$ এবং $\{\alpha_n\}$ অনুক্রমদ্বয় একই বাস্তব রাশি a'কে নিরূপণ করে ; $\{b_n\}$ এবং $\{\beta_n\}$ অনুক্রমদ্বয় একই বাস্তব রাশি b'কে নিরূপণ করে।

(খ) যেহেতু $\{a_n\}$ এবং $\{\beta_n\}$ অনুক্রমদ্বয় অভিসারী। অতএব n-এর সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য $|a_n| < \lambda$ এবং $|\beta_n| < \mu$। এখানে λ এবং μ যে কোন দুটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা। $\{b_n\}$ এবং $\{\beta_n\}$ অনুক্রমদ্বয় একই বাস্তব রাশি b'কে নিরূপণ করে। অতএব আমরা এমন একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা ϵ পাব যার ফলে

$$|a_{n+p}-\alpha_{n+p}| < \frac{\epsilon}{\lambda+\mu} \text{ এবং } |b_{n+p}-\beta_{n+p}| < \frac{\epsilon}{\lambda+\mu}$$

এখানে $p=1, 2, 3, \cdots\cdots$

এখন, $|a_{n+p}\, b_{n+p}-\alpha_{n+p}\, \beta_{n+p}|$

$$\leq |a_{n+p}(b_{n+p}-\beta_{n+p})+\beta_{n+p}(a_{n+p}-\alpha_{n+p})|$$

$$\leq (|a_{n+p}|\,|b_{n+p}-\beta_{n+p}|)+(\beta_{n+p}|\,|a_{n+p}-\alpha_{n+p}|$$

$$<\frac{\lambda\ \epsilon}{\lambda+\mu}+\frac{\mu\ \epsilon}{\lambda+\ \epsilon}$$

$$=\epsilon$$

(গ) ধরা যাক k একটি ধনাত্মক রাশি এবং $n > m$ (এখানে n এবং m ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)। তাছাড়া λ এবং μ (খ)'তে যে ভাবে বর্ণিত হয়েছে এখানেও সেই ভাবেই ধরা হোলো। তাহলে n'এর প্রতিষঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা ϵ পাব যার ফলে

$$|\beta_{n+p}-b_{n+p}| < \frac{\epsilon k^2}{\lambda+\mu},\ |\alpha_{n+p}-a_{n+p}| < \frac{\epsilon k^2}{\lambda+\mu} \text{ হবে}$$

এখানে $p=1, 2, 3, \cdots\cdots$, বলা বাহুল্য μ 'এর সকল মানের জন্য k রাশিটিকে এমনভাবে দেওয়া হয়েছে যে $|b_n|, |\beta_n| > k$ হবে।

এখন $$\left|\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}-\frac{\alpha_{n+p}}{\beta_{n+p}}\right|=\left|\frac{a_{n+p}\,\beta_{n+p}-\alpha_{n+p}\,b_{n+p}}{b_{n+p}\,\beta_{n+p}}\right|$$

$$=\left|\frac{a_{n+p}\,(\beta_{n+p}-b_{n+p})-b_{n+p}(\alpha_{n+p}-a_{n+p})}{b_{n+p}\,\beta_{n+p}}\right|$$

$$<\frac{|a_{n+p}|\,|\beta_{n+p}-b_{n+p}|+|b_{n+p}|\,|\alpha_{n+p}-a_{n+p}|}{|b_{n+p}|\,|\beta_{n+p}|}$$

$$<\frac{\lambda\,|\beta_{n+p}-b_{n+p}|+\mu\,|\alpha_{n+p}-a_{n+p}|}{|b_{n+p}|\,|\beta_{n+p}|}$$

$$<\frac{\lambda+\mu}{k^2}\cdot\frac{\epsilon k^2}{\lambda+\mu}=\epsilon$$

4·4. কয়েকটি বিশেষ বৈশিষ্ট্যঃ

ক্যাণ্টরের সংজ্ঞানুযায়ী যোগের বিনিময় নিয়ম, গুণনের বিনিময় নিয়ম, যোগের সংযোগ নিয়ম, গুণনের সংযোগ নিয়ম, বিতরক নিয়ম প্রভৃতি নিয়ে এই অংশে আলোচনা করবো।

(ক) যোগের বিনিময় নিয়ম ঃ

ধরা যাক a এবং b দুটি বাস্তব রাশি তাহলে প্রমাণ করতে হবে $a+b=b+a$.

প্রমাণ ঃ যেহেতু a এবং b দুটি বাস্তব রাশি অতএব ক্যাণ্টরের তত্ত্ব অনুযায়ী $\{a_n\}$ একটি অনুক্রম পাওয়া যাবে যেটি a 'কে নিরূপণ করে এবং $\{b_n\}$ একটি অনুক্রম পাওয়া যাবে যেটি b 'কে নিরূপণ করে।

এখন
$$\begin{aligned}(a+b) &\equiv \{a_n+b_n\}\\ &= a_1+b_1,\ a_2+b_2, \cdots\cdots\cdots\\ &= b_1+a_1,\ b_2+a_2, \cdots\cdots\cdots\\ &\equiv \{b_n+a_n\}\\ &= (b+a)\end{aligned}$$

(খ) গুণনের বিনিময় নিয়ম ঃ

$$\begin{aligned}ab &\equiv \{a_nb_n\}\\ &= a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3 \cdots\cdots\cdots\\ &= b_1a_1,\ b_2a_2,\ b_3a_3, \cdots\cdots\\ &\equiv \{b_na_n\}\\ &= ba.\end{aligned}$$

(গ) যোগের সংযোগ নিয়ম ঃ

a, b এবং c তিনটি বাস্তব রাশি হলে প্রমাণ করতে হবে

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

যেহেতু a, b এবং c তিনটি বাস্তব রাশি অতএব ক্যাণ্টরের তত্ত্ব অনুযায়ী আমরা $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, এবং $\{c_n\}$ তিনটি অনুক্রম পাব যারা যথাক্রমে a, b এবং c তিনটি বাস্তব রাশিকে নিরূপণ করে।

এখন $(a+b)+c \equiv \{(a_n+b_n)+c_n\}$

$$= (a_1+b_1)+c_1,\ (a_2+b_2)+c_2 \cdots\cdots$$
$$= a_1+(b_1+c_1),\ a_2+(b_2+c_2), \cdots\cdots$$
$$\equiv \{a_n+(b_n+c_n)\}$$
$$= a+(b+c)$$

(ঘ) গুণনের সংযোগ নিয়ম ঃ

$$a(bc) \equiv \{a_n(b_nc_n)\}$$
$$= a_1(b_1c_1),\ a_2(b_2c_2), \cdots\cdots$$
$$= (a_1b_1)c_1,\ (a_2b_2)c_2, \cdots\cdots$$
$$\equiv \{(a_nb_n)c_n\}$$
$$= (ab)c.$$

(ঙ) গুণনের বিতরক নিয়ম ঃ

$$(a+b)c \equiv \{(a_n+b_n)c_n\}$$
$$= (a_1+b_1)c_1,\ (a_2+b_2)c_2, \cdots\cdots$$
$$= a_1c_1+b_1c_1,\ a_2c_2+b_2c_2, \cdots\cdots$$
$$\equiv \{a_nc_n+b_nc_n\}$$
$$= ac+bc$$

4·5. **উপপাদ্য 1.** ক্যাণ্টরের তত্ত্বের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় দুটি বাস্তব রাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক মূলদরাশি অবস্থান করে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক a এবং b দুটি বাস্তব রাশি এবং $a > b$। আমাদের প্রমাণ করতে হবে a এবং b 'এর মধ্যে অসীম সংখ্যক মূলদরাশি অবস্থান করে।

যেহেতু a এবং b বাস্তব রাশি অতএব ক্যাণ্টরের তত্ত্ব অনুযায়ী দুটি অনুক্রম $\{a_n\}$ এবং $\{b_n\}$ যথাক্রমে a এবং b 'কে নিরূপণ করবে।

এখন $a > b \Rightarrow$ একটি মূলদরাশি $\delta > 0$; $\exists^{১} n_1 \in \mathrm{N}$ যার ফলে $n \geq n_1 \Rightarrow a_n - b_n \geq \delta$

[১] $\exists$ অর্থ পাওয়া যায় (there exists).

যেহেতু $\{a_n\}$ এবং $\{b_n\}$ অনুক্রমদ্বয় অভিসারী অতএব এরা কোশি অনুক্রম (Cauchy's sequence)। অর্থাৎ আমরা বলতে পারি যে কোন ক্ষুদ্র মূলদরাশি $\epsilon > 0$; $\exists n_2, n_3 \in N$. যার ফলে

$$m, n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

$$m, n \geq n_3 \Rightarrow |b_n - b_m| < \epsilon$$

[এখানে N ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সংহতি].

ধরা যাক $n_0 = max\ (n_1, n_2, n_3)$; তাহলে প্রত্যেকটি $n, m \geq n_0$ 'এর জন্য আমরা পাই

$$|a_n - a_m| < \epsilon,\ |b_n - b_m| < \epsilon,\ a_n - b_n \geq \delta$$

এখন প্রত্যেকটি $n > n_0$ 'এর জন্য আমরা পাই

$$\left.\begin{array}{c} -\epsilon < a_n - a_{n0} < \epsilon,\ -\epsilon < b_n - b_{n0} < \epsilon \\ a_{n0} - b_{n0} \geq \delta \end{array}\right\} \quad \cdots (\text{ক})$$

ধরা যাক x একটি ইচ্ছানুরূপ বাস্তব রাশি এবং $\epsilon < x < \delta$ ··· (খ)

এখন $\{a_{n0} - x\}$ এমন একটি অনুক্রম ধরা হোলো যার প্রত্যেকটি সদস্য মূলদরাশি $a_{n0} - x$ এর সঙ্গে অভিন্ন (identical)। তাহলে $\{a_{n0} - x\}$ অনুক্রমটি $a_{n0} - x$ বাস্তব রাশিটিকে নিরূপণ করে এবং এটি মূলদরাশি।

আমরা লিখতে পারি $a_{n0} - x \rightarrow a_{n0} - x$

আমরা প্রমাণ করবো $b < a_{n0} - x < a$ ...... (গ)

এখন (ক) এবং (খ) অনুযায়ী আমরা বলতে পারি যদি $n > n_0$ হয় তাহলে $a_n - (a_{n0} - x) = (a_n - a_{n0}) + x > -\epsilon + x > 0$

[(ক) এবং (খ) এর সাহায্যে]

আবার $n > n_0$ এর জন্য $a_n - (a_{n0} - x) > 0$

যেহেতু $a_n \rightarrow a,\ a_{n0} - x \rightarrow a_{n0} - x$

অতএব $a - (a_{n0} - x) > 0$ বা $a > a_{n0} - x$ ··· (ঘ)

আবার যদি $n > n_0$ হয় তাহলে

$$(a_{n_0} - x) - b_n = a_{n_0} - b_{n_0} + b_{n_0} - b_n - x$$
$$> \delta - \epsilon - x.$$
$$> 0 \text{ যদি } \delta - \epsilon > x \text{ হয়।}$$

$\therefore$ যদি $\delta - \epsilon > x$ হয় তাহলে

$(a_{n_0} - x) - b_n > 0 \ \forall \ n > n_0$

যেহেতু $(a_{n_0} - x) \to a_{n_0} - x$, $b_n \to b$;

$a_{n_0} - x - b > 0$ যখন $\delta - \epsilon > x$ হয়

বা, $a_{n_0} - x > b$ যখন $\delta - \epsilon > x$ হয় $\cdots$ (ঙ)

এখন (ঘ) এবং (ঙ) থেকে স্পষ্টই বলা যায়

$b < a_{n_0} - x < a$; অবশ্য মনে রাখতে হবে এক্ষেত্রে $\delta - \epsilon > x$।

ধরা যাক $\delta - \epsilon > x$ তাহলে

$x < \delta - \epsilon, \epsilon < x < \delta \Rightarrow \epsilon < x < \delta - \epsilon$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে মূলদরাশি $a_{n_0} - x$ এমন হবে যার ফলে

$b < a_{n_0} - x < a$ হবে যখন $\epsilon < x < \delta - \epsilon$.

যেহেতু ϵ'কে ইচ্ছানুরূপ ধরা হয়েছে সুতরাং ϵ এর মান অসীম সংখ্যক হতে পারে। অর্থাৎ ϵ এর মান $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots$ ধরা যেতে পারে। এগুলির প্রতিষঙ্গী x'এর মান $x_1, x_2, \cdots$নেওয়া যেতে পারে এবং এথেকেই বলা যায় $b < a_{n_0} - x_n < a$ যখন $\epsilon_n < x_n < \delta - \epsilon_n$। অর্থাৎ a এবং b বাস্তব রাশিদ্বয়ের মধ্যে অসীম সংখ্যক মূলদরাশি (এখানে $a_{n_0} - x_1, a_{n_0} - x_2, \cdots, a_{n_0} - x_n, \cdots\cdots$) অবস্থান করবে।

4·6. উপপাদ্য 2. দুটি ভিন্ন বাস্তব রাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক অমূলদ রাশি অবস্থান করে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক a এবং b দুটি ভিন্ন বাস্তব রাশি। তাছাড়া আরও ধরা যাক $a > b$ তাহলে আমরা দুটি ঘটনার সম্মুখীন হবো।

(এক) b যখন মূলদরাশি, (দুই) b যখন অমূলদরাশি।

(এক) অমূলদ রাশি x_n-এর প্রতিষঙ্গী আমরা একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা n পাব এবং $n \in \mathrm{N}$ হবে যার ফলে $x_n/n < a-b$ হবে

তাহলে $b < b+x_n/n < a$.

এখন যেহেতু b মূলদরাশি এবং x_n অমূলদরাশি $\Rightarrow b+x_n/n$ অমূলদ রাশি। যেহেতু x_n 'কে ইচ্ছানুরূপ ধরা হয়েছে অতএব a এবং b 'এর মধ্যে $b+x_1/1, b+x_2/2, b+x_3/3, \cdots\cdots$ অমূলদ রাশিগুলি অবস্থান করে এবং এদের সংখ্যা অসীম।

সুতরাং আমরা বলতে পারি দুটি ভিন্ন বাস্তব রাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক অমূলদ রাশি অবস্থান করে।

(দুই) b যখন অমূলদ রাশি। আমরা এমন একটি মূলদরাশি y পেতে পারি যার ফলে $y < a-b$ হয়। তাহলে $b < b+y < a$. b অমূলদরাশি, y মূলদরাশি $\Rightarrow b+y$ অমূলদরাশি।

যেহেতু y'কে ইচ্ছানুরূপ ধরা হয়েছে সুতরাং y এর মান অসীম সংখ্যক হতে পারে। অর্থাৎ y এর মান $y_1, y_2, \cdots$ হতে পারে। এ থেকে স্পষ্টই বলা যেতে পারে a এবং b বাস্তবরাশিদ্বয়ের মধ্যে অসীম সংখ্যক অমূলদরাশি অবস্থান করে। অর্থাৎ a এবং b এর মধ্যে $b+y_1, b+y_2, \cdots\cdots$ অমূলদ রাশিগুলি অবস্থান করে।

4·7. **উপপাদ্য** 3, ক্যাণ্টরের তত্ত্বের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় বাস্তব রাশির সংহতি ঘন (dense)

উপরেল্লেখিত তত্ত্বদ্বয়ের সাহায্যে এটি প্রমাণ করা যায়।

4·8. বাস্তব রাশি সম্পর্কে ডেডেকিণ্ড এবং ক্যাণ্টরের তত্ত্বের সমতুল্যতা নিরূপণ।

বাস্তব রাশি সম্পর্কে ডেডেকিণ্ড এবং ক্যাণ্টরেব তত্ত্ব দৃশ্যতঃ পার্থক্য থাকলেও এই তত্ত্ব দুটি প্রকৃতপক্ষে এক। অর্থাৎ ক্যাণ্টরের তত্ত্বানুযায়ী যদি কোন মূলদরাশিমালার সুষম অনুক্রম $\{a_n\}$ দিয়ে কোন বাস্তব রাশিকে সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহলে ডেডেকিণ্ডের তত্ত্বানুযায়ী ঐ অনুক্রমটির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত একটি অনন্য (unique) মূলদরাশির বিভাগীকরণ

পাওয়া যাবে যা ঐ একই বাস্তব রাশিকে সংজ্ঞায়িত করবে। বিপরীতক্রমে যদি ডেডেকিণ্ডের তত্ত্বানুযায়ী কোন মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে কোন বাস্তব রাশিকে সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহলে ঐ বিভাগীকরণের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত মূলদরাশিমালার একটি সুষম অনুক্রমের সাহায্যে ঐ বাস্তব রাশিটিকে সংজ্ঞায়িত করা যাবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $\{a_n\}$ মূলদরাশিমালার একটি অভিসারী অনুক্রম যেটি ক্যাণ্টরের তত্ত্বানুযায়ী x বাস্তব রাশিটিকে সংজ্ঞায়িত করে। আমরা দেখাবো ডেডেকিণ্ডের তত্ত্বানুযায়ী ঐ অনুক্রমটির সাহায্যে একটি মূলদরাশির বিভাগীকরণ (L, R) গঠন করা যাবে যেটি ঐ বাস্তব রাশি x 'কেই সংজ্ঞায়িত করবে।

ধরা যাক m একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এখন যদি $a_n - x > 0$ হয় $\forall n \geq m$ তাহলে $x \in L$ ধরা হবে। আর যদি $a_n - x < 0$ হয় $\forall n \geq m$ তাহলে $x \in R$ ধরা হবে। কিন্তু যদি $a_n - x$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোনটাই না হয় তাহতে সেক্ষেত্রে x-কে হয় L বিভাগে না হয় R বিভাগে রাখা হবে। এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে $\{a_n\}$ অনন্য অভিসারী অনুক্রমের জন্য (L, R) একটি বিভাগীকরণ পাওয়া যাচ্ছে। আমরা দেখাবো $\{a_n\}$ অনুক্রমহেতু যে মূলদরাশির বিভাগীকরণ পাওয়া যায় সেটি $\{a_n'\}$ অনুক্রমহেতু যে মূলদরাশির বিভাগীকরণ পাওয়া যাবে তার সঙ্গে অভিন্ন এবং উভয়ে একই বাস্তব রাশিকে সংজ্ঞায়িত করবে। ঠিক পূর্বের মতই x রাশিটি ধরা হোলো এবং $[a_n - x] \equiv [a_n' - x]$। এখন n-এর এমন একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে, যার ফলে ঐ মান থেকে বা পরবর্তী মানের পর $a_n - x$ এবং $a_n' - x$ উভয়েই সমচিহ্নযুক্ত হবে।

এ থেকে আমরা স্পষ্টই বুঝতে পারছি $\{a_n\}$ অনুক্রমহেতু x রাশিটি L বিভাগে অবস্থান করলে $\{a_n'\}$ অনুক্রমহেতু x রাশিটি L′ বিভাগে অবস্থান করবে। আবার যদি $\{a_n\}$ অনুক্রমহেতু x রাশিটি R বিভাগে অবস্থান করে তাহলে $\{a_n'\}$ অনুক্রমহেতু $x \in R'$ হবে। ব্যতিক্রম শুধু $\{a_n'\} = \{a_n\} = x$ হলে। সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি $\{a_n\}$ অনুক্রমের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত (L, R) বিভাগীকরণটি $\{a_n'\}$ অনুক্রমটির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত (L′, R′) বিভাগীকরণটির সঙ্গে অভিন্ন। অর্থাৎ

উপরেল্লিখিত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে দেখতে পাওয়া গেল ক্যাণ্টরের তত্ত্বানুযায়ী যে বাস্তব রাশিকে সংজ্ঞায়িত করা যায় তা ডেডেকিণ্ডের তত্ত্বানুযায়ী মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

বিপরীতক্রমে—যদি কোন বাস্তব রাশিকে ডেডেকিণ্ডের তত্ত্বানুযায়ী মূলদরাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহলে ঐ বিভাগীকরণের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত একটি মূলদরাশিমালার সুষম অনুক্রম পাওয়া যাবে যেটি ঐ একই বাস্তব রাশিকে সংজ্ঞায়িত করবে। ধরা যাক মূলদ-রাশি $a_1 \in L$ এবং মূলদরাশি $b_1 \in R_1$; এখন $(a_1+b_1)/2$ হয় L বিভাগে না হয় R বিভাগে অবস্থান করবে। যদি $(a_1+b_1)/2 \in L$ হয় তাহলে ধরা যাক $a_2=(a_1+b)/2$ এবং $b_2=b_1$ কিন্তু যদি $(a_1+b_1)/2 \in R$ হয় তাহলে $a_2=a_1$ এবং $b_2=(a_1+b_1)/2$ ধরা হবে।

আবার আমরা বুঝতে পারছি $(a_2+b_2)/2$ একটি বাস্তব রাশি। অতএব যদি $(a_2+b_2)/2 \in L$ হয় তাহলে ধরা যাক $a_3=(a_2+b_2)/2$ এবং $b_3=b_2$ কিন্তু যদি $(a_2+b_2)/2 \in R$ হয়, তাহলে ধরা যাক $a_3=a_2$ এবং $b_3=(a_2+b_2)/2$। ঠিক এই পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা দুটি মূলদরাশিমালার অনুক্রম $\{a_n\}$ এবং $\{b_n\}$ পাব। $\{a_n\}$ অনুক্রমটি একান্বয়ে উর্ধ্বগ (Monotonically increasing) এবং ঊর্ধ্বে সীমাবদ্ধ (Bounded above), $\{b_n\}$ অনুক্রমটি একান্বয়ে নিম্নগ এবং নিম্নে সীমাবদ্ধ (Bounded below)। অতএব অভিসারিত্বের তত্ত্বানুযায়ী (প্রয়োজনীয় এবং পর্যাপ্তভাবে বলা যায় কোন একান্বয়ে অনুক্রম অভিসারী হবে যদি এটি সীমাবদ্ধ হয়) বলা যায় দুটি অনুক্রমই অভিসারী হবে।

এখন, $b_2-a_2=\dfrac{b_1+a_1}{2}-a_1=\dfrac{b_1-a_1}{2}$

অথবা, $b_2-a_2=b_1-\dfrac{a_1+b_1}{2}=\dfrac{b_1-a_1}{2}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় $b_3-a_3=\dfrac{b_1-a_1}{2^2}$।

এই পদ্ধতি অনুসরণ করলে দেখা যাবে $b_n-a_n=\dfrac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$

তাছাড়া দেখা যাবে n-এর সর্ববৃহৎ মানের জন্য $b_n - a_n < \epsilon$ হবে (ϵ একটি অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা) $\{a_n\}$ অনুক্রমটির প্রত্যেকটি সদস্য L বিভাগে অবস্থান করার জন্য x-এর চেয়ে ছোট অথবা সমান। এবং $\{b_n\}$'র অনুক্রমটির প্রত্যেকটি সদস্য x-এর চেয়ে বড় অথবা সমান। আমরা দেখাবো $\{a_n\}$ এবং $\{b_n\}$ অনুক্রমদ্বয়ের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত x অনন্য (Unique).

ধরা যাক, x বাস্তব রাশিটি অনন্য নয়। সুতরাং আমরা x-এর বাঁদিকে একটি বাস্তব রাশি y নিলাম, এবং x যে সমস্ত বৈশিষ্ট্য মেনে চলে y ঠিক ঐ একই বৈশিষ্ট্য মেনে চলে। তাহলে নিশ্চয়ই n-এর যত বড় মানই হোক না কেন $a_n < y$ হবে। সুতরাং y এবং x-এর মধ্যে $\{a_n\}$ অনুক্রমটির কোন সদস্য অবস্থান করবে না। অর্থাৎ তাহলে $b_n - a_n \geq \delta$ ($x - y = \delta$, δ একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক রাশি) ফলে দেখা যাচ্ছে $\{a_n\}$ এবং $\{b_n\}$ অনুক্রম দুটি একই রাশিকে সংজ্ঞায়িত করতে পারছে না অর্থাৎ একটি আপাত বিরোধী সিদ্ধান্তে আমরা উপনীত হচ্ছি। এই সিদ্ধান্তে উপনীত হবার কারণ—যেহেতু আমরা y-কে x-এর বাঁদিকে নিয়েছি। অতএব y রাশিটি x-এর বাঁদিকে থাকতে পারে না। ঠিক অনুরূপভাবে আমরা বলতে পারি y রাশিটি x-এর ডানদিকে থাকতে পারে না অর্থাৎ x এবং y অভিন্ন।

সুতরাং আমরা দেখতে পেলাম ডেডেকিণ্ডের তত্ত্বানুযায়ী যে বাস্তবরাশিকে মূলদরাশিকে বিভাগীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞায়িত করা যায় তাকে মূলদরাশির সুষম অনুক্রমের সাহায্যেও সংজ্ঞায়িত করা যায়।

পরিশেষে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি ডেডেকিণ্ড এবং ক্যাণ্টরের তত্ত্ব দুটি দৃশ্যতঃ পার্থক্য থাকলেও মূলতঃ এক।

4·9. বাস্তব রাশির রূপায়ণ ঃ এবারে আমরা ক্যাণ্টরের তত্ত্বের সাহায্যে বাস্তব রাশিকে কিভাবে প্রকাশ করা যায় তা নিয়ে আলোচনা করবো। স্মরণ থাকতে পারে বাস্তবরাশি বলতে বাস্তব মূলদরাশি ও বাস্তব অমূলদরাশির কথাই ধরা হয়ে থাকে। আমরা প্রথমে মূলদ রাশি নয় (non-rational) এমন বাস্তবরাশি নিয়ে আলোচনা করবো। তারপর বাস্তব মূলদরাশি নিয়ে ব্যাপক আলোচনা করবো।

(i) কোন ধনাত্মক অমূলদ (non-rational) রাশি M-কে মূলাংক ভগ্নাংশের অসীমশ্রেণীর (non-terminating series of radix fraction) সাহায্যে অনন্যভাবে প্রকাশ করা যায়। মনে রাখা প্রয়োজন এখানে মূলাংক ≥ 2 হবে।

প্রমাণঃ ধরা যাক মূলাংক $= k$, এখন $0, k, 2k, \cdots$ এর মধ্যে আমরা একটি সর্ববৃহৎ রাশি $c_0 k$ পেতে পারি যার ফলে $c_0 k < k\text{M}$ হয় এবং $(c_0+1)\ k > k\text{M}$ হবে। (মনে রাখা প্রয়োজন c_0 একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)।

অর্থাৎ $c_0 < \text{M} < c_0 + 1$ অতএব $\text{M} = c_0 + \frac{\text{M}_1}{k}$

এখানে M_1 একটি ধনাত্মক রাশি কিন্তু $\text{M}_1 < k$। অনুরূপভাবে

$$\text{M}_1 = c_1 + \frac{\text{M}_2}{k},\ \text{M}_2 = c_2 + \frac{\text{M}_3}{k},\ \cdots,\ \text{M}_n = c_n + \frac{\text{M}_{n+1}}{k}.$$

পেতে পারি। এখানে $c_1, c_2, \cdots, c_n$ প্রত্যেকটি হয় ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা না হয় শূন্য হবে কিন্তু প্রত্যেকটিই k'র ছোট। তাছাড়া $\text{M}_1, \text{M}_2, \cdots, \text{M}_{n+1}$'এর প্রত্যেকটিই k এর ছোট। সুতরাং

$$\begin{aligned}
\text{M} &= c_0 + \frac{\text{M}_1}{k} \\
&= c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{\text{M}_2}{k^2} \\
&= c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \frac{\text{M}_3}{k^3} \\
&= \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
&= \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
&= c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \cdots\cdots + \frac{c_n}{k^n} + \frac{\text{M}_{n+1}}{k^{n+1}}
\end{aligned}$$

এখানে $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 'এর প্রত্যেকটি হয় ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা না হয় শূন্য হবে এবং $0 < \text{M}_{n+1} < k$।

আমরা দেখাবো,

$$\text{M} = c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \cdots\cdots$$

এখন, $\text{M} - \left(c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \cdots\cdots + \frac{c_n}{k^n}\right)$

$$=\left(c_0+\frac{c_1}{k}+\frac{c_2}{k^2}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{k^n}+\frac{M_{n+1}}{k^{n+1}}\right)$$

$$-\left(c_0+\frac{c_1}{k}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{k^n}\right)$$

$$=\frac{M_{n+1}}{k^{n+1}}<\frac{k}{k^{n+1}}=\frac{1}{k^n}$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে অনুক্রমটি (যার n-তম পদ $=c_0+\frac{c_1}{k}+\frac{c_2}{k^2}+\cdots+\frac{c_n}{k^n}$) একটি অভিসারী অনুক্রম এবং ক্যাণ্টরের তত্ত্ব অনুযায়ী বাস্তব রাশি M'কে চিহ্নিত করে। অর্থাৎ M রাশিটিকে একটি মূলাংক ভগ্নাংশের অসীম শ্রেণীর সাহায্যে প্রকাশ করা হোলো। অতএব

$$M=c_0+\frac{c_1}{k}+\frac{c_2}{k^2}+\frac{c_3}{k^3}+\cdots+\frac{c_n}{k^n}+\cdots$$

(ii) যদি M মূলদরাশি হয় তাহলে এটিকে মূলাংক ভগ্নাংশের সসীম শ্রেণীতে অথবা মূলাংক ভগ্নাংশের আবৃত্ত শ্রেণীতে (recurring series) প্রকাশ করা যায়।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক M রাশিটিকে p/q এই নিম্নতম পদে লেখা হোলো। তাহলে $p=\gamma_0 q+\lambda_0$ এখানে $\lambda_0<q, k\lambda_0=\gamma_1 q+\lambda_1$ এবং $\lambda_1<q,\ k\lambda_1=\gamma_2 q+\lambda_2,\ \cdots,\ k\lambda_{n-1}=\gamma_n q+\lambda_n$। এখন λ_0, $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ 'এর প্রত্যেকটি শূন্যও হতে পারে আবার ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাও হতে পারে কিন্তু q'এর থেকে ছোট। যদি ধরা যায় $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$'এর মধ্যে λ_nটি শূন্য তাহলে

$$M=p/q$$

$$=\gamma_0+\frac{\lambda_0}{q}$$

$$=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{k}+\frac{\lambda_1}{kq}$$

$$=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{k}+\frac{\gamma_2}{k^2}+\frac{\lambda_2}{qk^2}$$

$$=\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$=\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{k}+\frac{\gamma_2}{k^2}+\cdots\cdots+\frac{\gamma_n}{k^n};$$

সুতরাং M রাশিটিকে মূলাংক ভগ্নাংশের সসীম শ্রেণীতে প্রকাশ করা যাচ্ছে। এই মূলাংক ভগ্নাংশের সসীম শ্রেণীকে কোন একটি পর্যায়বৃত্ত এক (periodic one) দিয়ে লেখা যেতে পারে। অর্থাৎ যদি γ_n'এর পরিবর্তে γ_{n-1} নেওয়া যায় তাহলে $k\lambda_{n+1}=(\gamma_n-1)q+q$, সুতরাং γ_n শূন্যের পরিবর্তে q হয়ে যায়। এবং $kq=(k-1)q+q$, অতএব λ_n, λ_{n+1}, $\cdots$ প্রত্যেকটিই q'এর সমান হবে এবং γ_n, γ_{n+1}, $\cdots$ প্রত্যেকটি $(k-1)$ হবে অর্থাৎ

$$M=p/q=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{k}+\frac{\gamma_2}{k^2}+\cdots+\frac{\gamma_n-1}{k^n}+\frac{k-1}{k^{n+1}}+\frac{k-1}{k^{n+2}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots(A)$$

যদি কখনও λ_1, λ_2, $\cdots$ λ_n অন্তর্হিত না হয় তাহলে এগুলির প্রত্যেকটি $1, 2, 3, \cdots (q-1)$'এর মধ্যে যে কোন একটি মান নেবে এবং প্রত্যেকটি অসমান হবে না। ধরা যাক λ_n'ই প্রথম রাশি যেটি উপরেল্লেখিত (A)'তে পুনর্বার দেখা যায়। এবং $\lambda_n=\lambda_{n+m}$ তাহলে $k\lambda_n=\gamma_{n+1}q+\lambda_{n+1}$ এবং $k\lambda_{n+m}=k\lambda_n=\gamma_{n+1}q+\lambda_{n+1}$ কিন্তু $k\lambda_{n+m}=\gamma_{n+m+1}q+\lambda_{n+m+1}$, সুতরাং $\lambda_{n+1}=\lambda_{n+m+1}$ এবং $\gamma_{n+1}=\gamma_{n+m+1}$। অনুরূপভাবে $\lambda_{n+2}=\lambda_{n+m+2}$ এবং $\gamma_{n+2}=\gamma_{n+m+2}$ হবে। এখন এই পদ্ধতি অনেকদূর পর্যন্ত অনুসরণ করা যাক। এবং তাহলে দেখা যাবে M রাশিটিকে একটি মূলাংক ভগ্নাংশের আবৃত্ত শ্রেণীতে প্রকাশ করা যাচ্ছে।

পঞ্চম অধ্যায়

উদাহরণ

উদাহরণ 1. প্রমাণ করুন $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

যেহেতু $\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{3}$ বাস্তব অমূলদ রাশি অতএব মূলদ রাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে এই দুটি রাশিকে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

ধরা যাক $\sqrt{2} \equiv (L_1, R_1)$ এবং $\sqrt{3} \equiv (L_2, R_2)$ অর্থাৎ L_1 বিভাগে ঋণাত্মক রাশি, শূন্য এবং সেই সমস্ত ধনাত্মক রাশি রাখা হয়েছে যাদের বর্গ 2 'এর থেকে ছোট। L_2 বিভাগে ঋণাত্মক রাশি, শূন্য এবং সেই সমস্ত ধনাত্মক রাশি রাখা হয়েছে, যাদের বর্গ 3 'এর থেকে ছোট। এখন $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ দেখাতে গেলে আমাদের প্রমাণ করতে হবে $L_1 \subset L_2$। স্বাভাবিকভাবে বলা যায় যে কোন রাশি ধরা যাক $x \in L_1$ তাহলে $x \in L_2$ হবে। এখন আমরা এমন একটি রাশি y নিতে পারি যেটির বর্গ 2 এবং 3 'এর মধ্যে অবস্থান করে অর্থাৎ $2 < y^2 < 3 \Rightarrow y \notin L_1$ কিন্তু $y \in L_2$ অর্থাৎ আমরা সহজেই দেখতে পেলাম $L_1 \subset L_2$ অতএব $\sqrt{2} < \sqrt{3}$।

উদাহরণ 2. প্রমাণ করুন $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$.

যেহেতু 1 এবং 2 বাস্তব মূলদ রাশি, $\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{3}$ বাস্তব অমূলদ রাশি অতএব মূলদ রাশির বিভাগীকরণের সাহায্যে এই সমস্যাগুলিকে সংজ্ঞায়িত করা যায়। ধরা যাক $1 \equiv (L_1, R_1)$ অর্থাৎ $L_1 = \{x : x < 1\}$ এবং $R_1 = \{x : x \geq 1\}$, $\sqrt{2} \equiv (L_2, R_2)$ অর্থাৎ L_2 বিভাগে ঋণাত্মক রাশি, শূন্য এবং সেই সমস্ত রাশি রাখা হয় যাদের বর্গ 2 'এর ছোট। R_2 বিভাগে বাকী সমস্ত রাশি রাখা হয়। $\sqrt{3} \equiv (L_3, R_3)$; L_3 বিভাগে ঋণাত্মক রাশি, শূন্য এবং সেই সমস্ত ধনাত্মক রাশি রাখা হয় যাদের বর্গ 3 'এর ছোট। R_3 বিভাগে বাকী সমস্ত রাশি রাখা হোলো। $2 \equiv (L_4, R_4)$; $L_4 = \{x : x < 2\}$, $R_4 = \{x : x \geq 2\}$ এখন স্বাভাবিক ভাবেই বলা যায় $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset L_4$ কারণ $L_2 \cap R_1$ এর মধ্যে 6/5 এবং 5/4 অবস্থান করছে।

$\therefore \quad 1 < \sqrt{2} \cdots\cdots (i)$

$L_3 \cap R_2$ 'এর মধ্যে $\frac{3}{2}$ এবং $\frac{5}{3}$ আছে $\quad \therefore \sqrt{2} < \sqrt{3} \cdots (ii)$

$L_4 \cap R_3$ 'এর মধ্যে $\frac{15}{8}$, $\frac{17}{9}$ অবস্থান করছে $\therefore \sqrt{3} < 2 \cdots (iii)$

অতএব $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$.

উদাহরণ 3. প্রমাণ করুন $\log_{10}{}^5$ একটি অমূলদ রাশি।

প্রমাণঃ ধরা যাক $\log_{10}{}^5$ অমূলদ রাশি নয় এবং আমরা আরও সুবিধার জন্য মনে করি এটি মূলদরাশি অর্থাৎ $\log_{10}{}^5 = p/q$

এখন এখানে p এবং q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $p < q$ ও $q \neq 0$

তাহলে $\quad (10)^{p/q} = 5$

বা, $\quad 10^p = 5^q$

বা, $(2.5)^p = 5^q$

বা $\quad 2^p = 5^{q-p} \cdots\cdots (i)$

এ থেকে দেখা যাচ্ছে 2 এর কোন ঘাত ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে এটি স্বাভাবিক জোড় সংখ্যা হবে। অর্থাৎ $2^p =$ জোড় সংখ্যা। কিন্তু 5^{q-p} কখনই জোড় সংখ্যা হতে পারে না। আবার (i) নং থেকে আমরা এ ধরনের সমতা দেখতে পাচ্ছি। এটি অসম্ভব। সুতরাং $\log_{10}{}^5$ 'কে মূলদরাশি ধরা হয়েছে তা ঠিক নয়। অর্থাৎ $\log_{10}{}^5$ অমূলদ রাশি।

উদাহরণ 4. x একটি মূলদরাশি এবং $2 < x < \sqrt{5}$। প্রমাণ করুন যে, একটি মূলদরাশি x এবং $\sqrt{5}$ এর অন্তবর্তী।

প্রমাণঃ ধরা যাক $x < x + h < \sqrt{5}$

তাহলে বর্গ করে আমরা পাই $x^2 < (x+h)^2 < 5$.

স্পষ্টই বলা যায় $h < 1$ অতএব $h^2 < h$.

এখন $(x+h)^2 < 5$ অর্থাৎ $x^2 + 2xh + h^2 \leq 5$ হয়

অর্থাৎ $1 < h \leq \dfrac{5 - x^2}{2x + 1}$ হয়, তাহলে $(x+h)^2 < 5$

উদাহরণ 5. a, b, x এবং y রাশিগুলি এমনই মূলদ রাশি যার ফলে $(ay-bx)^2+4(a-x)(b-y)=0$ হয় তাহলে দেখান হয় যে (i) $x=a, y=b$ অথবা (ii) $(1-ab)$ এবং $(1-xy)$ মূলদ রাশির বর্গ।

প্রমাণঃ যেহেতু $(ay-bx)^2+4(a-x)(b-y)=0$

অতএব $(ay-bx)^2=4(x-a)(b-y)$

যেহেতু বামপার্শ্বের অংশটি পূর্ণবর্গ অতএব দক্ষিণ পার্শ্বের অংশটিকে নিশ্চয়ই পূর্ণবর্গ হতে হবে। এবং এটি হতে গেলে $x=b$ এবং $y=a$ হতে হবে। যদি এই সম্বন্ধটিই ধরা যায় তাহলে

$$(a^2-b^2)^2=4(b-a)(b-a)$$

বা, $(a+b)^2(a-b)^2=4(b-a)^2$

সুতরাং সমতাটি প্রযোজ্য হবে যদি $x=b,\ y=a$ এবং তারপর $a+b=\pm 2$ হয়।

এখন এটি না হলে সমতাটি প্রযোজ্য হবে যদি বামপার্শ্ব এবং দক্ষিণপার্শ্ব উভয়েই শূন্য হয় অর্থাৎ $x=a$ বা $y=b$ হয়। এখন যদি x এবং y এর উপরেল্লেখিত মান না হয় তাহলে আমরা বলতে পারি

$$(ay+bx)^2-4abxy+4ab-4ay-4bx+4xy=0$$

বা, $(ay+bx)^2-4(ay+bx)+4-4$
$$+4ab-4abxy+4xy=0$$

বা, $\{(ay+bx)-2\}^2-4(1-ab)+4xy(1-ab)=0$

বা, $(ay+bx-2)^2=4(1-ab)(1-xy)$

এখন যদি এই সম্পর্কটি সঠিক হয় তাহলে $4(1-ab)(1-xy)$ 'কে একটি পূর্ণবর্গ হতে হবে অর্থাৎ $(1-ab)$ এবং $(1-xy)$ 'কে মূলদ রাশির পূর্ণবর্গ হতে হবে কারণ $ab\neq xy$.

উদাহরণ 6. যদি $ax^2+2hxy+by^2=1$ এবং $a^1x+2h^1xy+b^1y^2=1$ এই দুইটি সমীকরণে a, h, b, a^1, h^1, b^1 এবং xy মূলদ সংখ্যা হয় তাহলে প্রমাণ করুন

(i) $(h-h^1)^2-(a-a^1)(b-b^1)$

(ii) $(ab^1-a^1b)^2-4(ah^1-a^1h)(bh^1-b^2h)$

উভয়েই মূলদ রাশির বর্গফল।

প্রমাণঃ প্রথম সমীকরণ হ'তে দ্বিতীয় সমীকরণটি বিয়োগ করে পাই

$$(a-a^1)x^2+2(h-h^1)xy+(b-b^1)y^2=0$$

যেহেতু x/y মূলদ রাশি $\therefore$ $(h-h^1)^2-(a-a^1)(b-b^1)$ একটি মূলদ রাশির বর্গফল।

এখন মূল সমীকরণদ্বয়ে x^2, xy এবং y^2 অপনয়ন করে আমরা পাই

$$2(ha^1-h^1a)xy+(a^1b-ab^1)y^2=a^1-a$$

$$(h^1a-ha^1)x^2+(h^1b-hb^1)y^2=h^1-h.$$

$$(ab^1-a^1b)x^2+2(hb^1-h^1b)xy=b^1-b.$$

ধরা যাক $p=a^1b-ab^1$, $q=hb^1-h^1b$,

$r=ha^1-h^1a$ তাহলে স্বভাবতঃই আমরা দেখতে পাচ্ছি

$$(rx^2+qy^2)^2-(px^2+2qxy)(2rxy-py^2)$$
$$=(h-h^1)^2-(a-a^1)(b-b^1)$$

পূর্বে আমরা দেখেছি ডানপক্ষ একটি মূলদ রাশির বর্গফল।

সুতরাং বামপক্ষ নিশ্চয়ই কোন মূলদ রাশির বর্গ হতে বাধ্য অর্থাৎ ধরা যাক বামপক্ষ $=(rx^2+mxy+qy^2)^2$। এখানে m একটি মূলদ রাশি।

বামপক্ষে x^2y^2 এর সহগ $=2qr-4qr+p^2=p^2-2qr.$

অতএব $(p^2-2qr)=m^2+2qr.$

অর্থাৎ $m^2=p^2-4qr=(ab^1-a^1b)-4(hb^1-h^1b)$
(hb^1-h^1a)

উদাহরণ 7. $\{x_n\}$ একটি অনুক্রম যার n-তম পদ অর্থাৎ,

$$x_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2r+1)}{2.4.\cdots\cdots\cdots\cdots 2r}\cdot\frac{1}{2^r}$$

তাহলে এই অনুক্রমটির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত একটি ডেডোকিণ্ডের বিভাগীকরণ নির্ণয় করুন।

প্রমাণ ঃ এখানে

$$x_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1.3.5.\cdots\cdots(2r+1)}{2.4.\cdots\cdots\cdots\cdots 2r} \cdot \frac{1}{2^r}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdots\cdots\frac{2r+1}{2}}{\lfloor r} \cdot \frac{1}{2^r}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\lfloor 1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2}}{\lfloor n}\cdot\frac{1}{2^n} \cdots\cdots(1)$$

$$< \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots\cdots$$

বা, $x_n < \left(1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots\cdots\right) - 1$

বা, $x_n < (1-\frac{1}{2})^{-\frac{3}{2}} - 1 \ \forall n.$

বা, $x_n < \sqrt{8} - 1 \ \forall n$

স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে $x_{n+1} > x_n$ এবং যেহেতু $x_n < \sqrt{8}-1 \ \forall \ n$ দেখা যাচ্ছে $\{x_n\}$ অনুক্রমটি একান্বয়ে ঊর্ধ্বগ এবং আবদ্ধ (bounded)। অতএব এটি অভিসারী। এবং $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{8}-1$ অর্থাৎ আমরা দেখতে পাচ্ছি অনুক্রমটি $\sqrt{8}-1$ এই অমূলদ রাশিতে অভিসারী হচ্ছে। এখন আমরা (L, R) বিভাগীকরণটি পর পৃষ্ঠায় প্রদত্ত উপায়ে গঠন করি

$$L=\{x \in Q : (x+1)^2 < 8\}$$

$$R=\{x \in Q : (x+1)^2 > 8$$

এখানে Q মূলদ রাশির সংহতি (set)।

উদাহরণ 8. $\{x_n\}$ একটি অনুক্রম যার n-তম পদ অর্থাৎ

$$x_n=\sum_{r=1}^{n} \frac{1.3.5.\cdots\cdots(2r-1)}{3.6.9.\cdots\cdots 3r}$$

তাহলে এই অনুক্রমটির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত একটি ডেডেকিণ্ডের বিভাগীকরণ নির্ণয় করুন।

প্রমাণঃ এখানে

$$x_n=\sum_{r=1}^{n} \frac{1.2.5.\cdots\cdots\cdots(2r-1)}{3.6.9.\cdots\cdots\cdots 3r}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1.3.5\cdots\cdots\cdots(2n-1)}{3.6.\cdots\cdots\cdots 3n}$$

$$< \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\right]-1$$

অর্থাৎ $x_n < (1-\frac{2}{3})^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-1 \ \forall n,$

স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে $x_{n+1} > x_n$ এবং যেহেতু $x_n < \sqrt{3}-1$ $\forall n$ অতএব $\{x_n\}$ অনুক্রমটি একান্বয়ে উর্ধ্বগ এবং আবদ্ধ।

অতএব এটি অভিসারী এবং $\lim\limits_{n\to a} x_n=\sqrt{3}-1.$

আমরা স্পষ্টই দেখতে পাচ্ছি যে $\{x_n\}$ অনুক্রমটি $\sqrt{3}-1$

অমূলদ রাশিতে অভিসারী হচ্ছে। এখন আমরা (L, R) বিভাগীকরণটি নিম্ন উপায়ে গঠন করছি

$$L=\{x \in Q : (x+1)^2 < 3\}$$
$$R=\{x \in Q : (x+1)^2 > 3\}.$$

উদাহরণ 9. $\{x_n\}$ একটি অনুক্রম যার n-তম পদ অর্থাৎ

$$x_n=\frac{1}{n}\left\{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\cdots\cdots\cdots+n^{\frac{1}{n}}\right\}$$

তাহলে এই অনুক্রমটির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত একটি ডেডেকিণ্ডের বিভাগীকরণ নির্ণয় করুন।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $a_n=n^{\frac{1}{n}}$

তাহলে $a_1=1,\ a_2=2^{\frac{1}{2}}$ ....

স্বভাবতঃই $a_1<a_2<a_3<\cdots\cdots\cdots$

অর্থাৎ $\{a_n\}$ অনুক্রমটি একান্বয়ে উর্ধ্বগ।

এখন আমরা প্রথমে $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ নির্ণয় করবো।

ধরা যাক $b_n=n$ তাহলে কোসির দ্বিতীয় সীমা উপপাদ্য থেকে আমরা পাই

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$$

বা, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

এখানে $x_n=\dfrac{a_1+\cdots\cdots\cdots+a_n}{n}$ দেওয়া আছে

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1\cdots\cdots\cdots+a_n}{n}\right)$$

কোসির প্রথম সীমা উপপাদ্য থেকে আমরা বলতে পারি—

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

অর্থাৎ $\{x_n\}$ অনুক্রমটি 1 'এ অভিসারী হচ্ছে।

এখন L এবং R বিভাগ দুটি নিম্নরূপে নির্ণয় করছি

$$L = \{x \in Q : x > 1\}$$
$$R = \{n \in Q : x \geq 1\}.$$

আমরা স্বাভাবিকভাবেই প্রমাণ করতে পারি (L, R) একটি ডেডেকিণ্ডের বিভাগীকরণ।

উদাহরণ 10. যদি $m = \sqrt{4n^2 + 5n + 6}$ এই সমীকরণে m এবং n উভয়ই মূলদ সংখ্যা হয় তাহলে n এর মানের জন্য একটি সূত্র নির্ণয় করুন।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $m = 2n + k$ (k একটি মূলদ রাশি)

তাহলে $(2n+k)^2 = 4n^2 + 5n + 6 \cdots\cdots\cdots(1)$

$$= \left(2n + \frac{5}{4}\right)^2 + 6 - \frac{25}{16}$$

$$= \left(2n + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{71}{16}$$

অতএব $k > 5/4$

(1) থেকে পাই $n = \dfrac{k^2 - 6}{5 - 4k}$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

সংহতির সংজ্ঞা ও প্রক্রিয়া

6·1 সংহতি (Set)ঃ সাধারণতঃ কতকগুলি উপাদানের সমষ্টিকে আমরা সংহতি (set) বলে থাকি। গাণিতিক সংজ্ঞা দিলে এইরূপ দাঁড়ায়—এক বা একাধিক নিয়মে আবদ্ধ উপাদানসমূহের সমষ্টিকে সংহতি বলা হয়। যেমন 1, 3, 5, 7, ……। এটি একটি সংহতি কারণ এখানে বিজোড় সংখ্যাগুলি নেওয়া হয়েছে এবং প্রত্যেকটি উপাদান ঠিক পরবর্তী উপাদান অপেক্ষা 2 ছোট।

6·2 রিক্ত সংহতি (Null set)ঃ যে সংহতিতে কোন উপাদান নেই তাকে রিক্ত সংহতি বলা হয় এবং ϕ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে লেখা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়—ভারতের মহিলা রাষ্ট্রপতি নিয়ে একটি সংহতি গঠন করলে একটি রিক্ত সংহতি পাওয়া যাবে। কারণ এখনও পর্যন্ত ভারতে কোন মহিলা রাষ্ট্রপতি নেই।

6·3 একক সংহতি (Singleton Set)ঃ যে সংহতিতে একটিমাত্র সদস্য আছে সেই সংহতিটিকে একক সংহতি বলা হয়। যেমন $\{5\}$.

6·4 সসীম সংহতি (Finite Set)ঃ যদি কোন সংহতিতে সীমিত সংখ্যক সদস্য থাকে তাহলে সেই সংহতিটিকে সসীম সংহতি বলা হবে। যেমন $G=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, এখানে G সংহতিটিতে মাত্র 5টি সদস্য আছে। অতএব এটি একটি সসীম সংহতি।

6·5 অসীম সংহতি (Infinite Set)ঃ যদি কোন সংহতিতে অসীম সংখ্যক সদস্য থাকে তাহলে সেই সংহতিটিকে অসীম সংহতি বলা হবে যেমন $G=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ একটি অসীম সংহতি কারণ এই সংহতিটিতে সদস্য সংখ্যা অসীম।

6·6 সংহতিদ্বয়ের সমতা (Equality of two sets)ঃ যদি দুটি সংহতিতে A এবং B এরূপ হয় যে, A সংহতিটির প্রত্যেকটি সদস্য B'র সদস্য এবং B সংহতিটির প্রত্যেকটি সদস্য A'র সদস্য তাহলে আমরা বলবো দুটি সংহতি সমান এবং $A=B$ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হবে।

6·7 যথার্থ সহ সংহতি (Proper sub set) : ধরা যাক A এবং B দুটি সংহতি। এখন A'র প্রত্যেকটি সদস্যই B'র সদস্য হয় কিন্তু B'র অন্ততঃ একটি সদস্য আছে যা A'র সদস্য নয় তাহলে আমরা A সংহতিটিকে B'র যথার্থ সহ সংহতি বলবো এবং $A \subset B$ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করবো। অনেক সময় B'কে A'র অধি সংহতিও (Super set) বলা যায় এবং $B \supset A$ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে লেখা হয়। কখনও কখনও A'র সদস্য B'র সদস্যের সঙ্গে সমান হয় তখন সেক্ষেত্রে লেখা হয় $A \subseteq B$।
উদাহরণ : ধরা যাক $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ এবং $B = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$; এখানে দেখা যাচ্ছে A'র সব সদস্য B'তে আছে কিন্তু B'র $(6, 7, 8)$ সদস্যগুলি A'র মধ্যে নেই অতএব $A \subset B$.

6·8 দুটি সংহতির ছেদ (Intersection of two sets) : A এবং B দুটি সংহতি। যদি A এবং B সংহতিদ্বয়ের সাধারণ সদস্য নিয়ে নূতন সংহতি গঠন করা যায় তাহলে ঐ নূতন সংহতিকে A এবং B সংহতিদ্বয়ের ছেদ বলা হয় এবং $A \cap B$ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

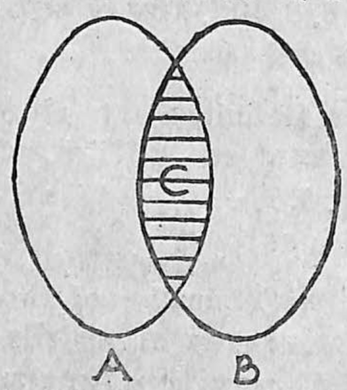
উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক $A = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, $B = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ তাহলে $A \cap B = (4, 5, 6, 7, 8)$.

সুতরাং এথেকে আমরা বলতে পারি

$A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$

অর্থাৎ $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ এবং $x \in B$.

ভেনের চিত্রের সাহায্যে সংহতিদ্বয়ের ছেদকে এইভাবে দেখানো হয় :—



এখানে C অংশটিকে A এবং B সংহতিদ্বয়ের ছেদ ধরা হবে।

6·9 দুটি সংহতির সমন্বয় (Join of two sets) : ধরা যাক A এবং B দুটি সংহতি। যদি A এবং B সংহতিদ্বয়ের সমস্ত সদস্য নিয়ে নূতন সংহতি গঠন করা যায় তাহলে ঐ নূতন সংহতিকে A এবং B সংহতিদ্বয়ের সমন্বয় বলা হবে এবং $A \cup B$ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক $A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ এবং $B = (5, 6, 7, 8, 9, 10)$

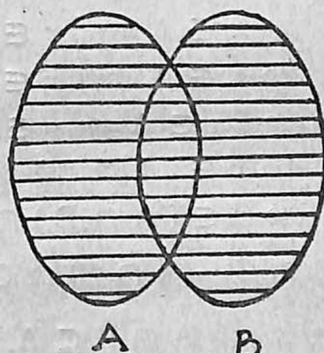
তাহলে $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

সুতরাং এথেকে আমরা বলতে পারি

$A \cup B = \{x : x \in A$ বা $x \in B\}$

অর্থাৎ $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ বা $x \in B$.

ভেনের চিত্রের সাহায্যে সংহতিদ্বয়ের সমন্বয়কে এইভাবে দেখানো হয় :—



এখানে লাইন টানা সব অংশটুকুই A এবং B'এর সমন্বয় ধরা হবে।

6·10 তত্ত্ব 1. প্রমাণ করুন $A \cap A = A$

প্রমাণ : ধরা যাক $x \in A \cap A$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in A$

সুতরাং $A \cap A$'র সমস্ত সদস্যই A'র মধ্যে অবস্থিত অর্থাৎ

$A \cap A \subseteq A \cdots\cdots$ (i)

আবার ধরা যাক $y \in A \Rightarrow y \in A$ এবং $y \in A$

$$\Rightarrow y \in A \cap A.$$

$\therefore \quad A \subseteq A \cap A \cdots\cdots$ (ii)

অতএব (i) এবং (ii) থেকে আমরা পাচ্ছি $A = A \cap A$.

6·11 তত্ত্ব 2. প্রমাণ করুন $A \cap B = B \cap A$.

প্রমাণঃ ধরা যাক $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Leftrightarrow x \in B$ এবং $x \in A$

$\Leftrightarrow x \in B \cap A$

$\therefore \quad A \cap B = B \cap A.$

6·12 তত্ত্ব 3. প্রমাণ করুন $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

প্রমাণঃ ধরা যাক $x \in A \cap (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $\{x \in B \cap C\}$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $\{x \in B$ এবং $x \in C\}$

$\Leftrightarrow \{x \in A$ এবং $x \in B\}$ এবং $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ এবং $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C.$

$\therefore \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

6·13 তত্ত্ব 4. প্রমাণ করুন (i) $A \cap B \subseteq A$, (ii) $A \cap B \subseteq B$.

প্রমাণঃ ধরা যাক $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

$\therefore \quad A \cap B \subseteq A.$

আবার $x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$

$\therefore \quad A \cap B \subset B.$

6·14 তত্ত্ব 5. প্রমাণ করুন যদি U কোন সার্বভৌমিক (Universal) সংহতি হয় তাহলে $A \cap U = A$ হবে (পরে সার্বভৌমিক সংহতির সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে)।

প্রমাণ ঃ আমরা স্বাভাবিকভাবেই জানি $A \cap U \subseteq A$……(i)

আবার $x \in A \Rightarrow x \in U$

$\therefore \quad x \in A \Rightarrow x \in A \cap U$

অর্থাৎ $A \subseteq A \cap U$ …… (ii)

অতএব (i) এবং (ii) থেকে আমরা বলতে পারি $A \cap U = A$.

6·15 তত্ত্ব 6. প্রমাণ করুন $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x \in A \cup (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ বা $(x \in B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ বা $\{x \in B$ বা $x \in C\}$

$\Leftrightarrow \{x \in A$ বা $x \in B\}$ বা $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ বা $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

অর্থাৎ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

6·16 তত্ত্ব 7. যদি U একটি সার্বভৌমিক সংহতি হয় তাহলে প্রমাণ করুন

$$A \cup U = U$$

প্রমাণ ঃ যেহেতু U সার্বভৌমিক সংহতি অতএব আমরা বলতে পারি

$$A \cup U \subseteq U \text{……… (i)}$$

আবার আমরা জানি $U \subseteq A \cup U$……… (ii)

অতএব (i) এবং (ii) থেকে আমরা বলতে পারি $A \cup U = U$

6·17 তত্ত্ব 8. প্রমাণ করুন $A \cup B = B \cup A$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ বা $x \in A$

$\Rightarrow x \in B \cup A$.

$\therefore \quad A \cup B \subseteq B \cup A \cdots\cdots$ (i)

আবার ধরা যাক $y \in B \cup A \Rightarrow y \in B$ বা $y \in A$

$\Rightarrow y \in A$ বা $y \in B$

$\Rightarrow y \in B$ বা $y \in A$

$\Rightarrow y \in A \cup B.$

$\therefore \quad B \cup A \subseteq A \cup B \cdots\cdots$ (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে আমরা বলতে পারি $A \cup B = B \cup A.$

6·18 তত্ত্ব 9. A এবং B দুটি সংহতি হলে প্রমাণ করা যায়

(i) $A \subseteq A \cup B$ এবং (ii) $B \subseteq A \cup B.$

প্রমাণ (i) ধরা যাক $x \in A \Rightarrow x \in A$ বা $x \in B.$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

$\therefore \quad A \subseteq A \cup B.$

(ii) অনুরূপভাবে $B \subseteq A \cup B$ প্রমাণ করা যায়।

6·19 তত্ত্ব 10. প্রমাণ করুন $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$

তত্ত্বটি প্রমাণ করতে গিয়ে আমাদের দেখাতে হবে

(i) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B.$

(ii) $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B.$

(i) **প্রমাণ** : ধরা যাক $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in B.$

অতএব $A \cup B \subseteq B \cdots\cdots$ (ক)

আমরা পূর্বে দেখেছি $B \subseteq A \cup B \cdots\cdots$ (খ)

অতএব (ক) এবং (খ) থেকে আমরা পাই

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B.$

(ii) বিপরীতক্রমে ধরা যাক $A \cup B = B$.

আমরা প্রমাণ করবো $A \subseteq B$.

প্রমাণ : ধরা যাক $x \in A \Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in B$.

$\therefore \quad A \subseteq B$ প্রমাণিত হ'লো।

6·20 তত্ত্ব 11. প্রমাণ করুন $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

প্রমাণ : এটি প্রমাণ করতে গেলে আমাদের দেখাতে হবে

(ক) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

(খ) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$.

(ক) ধরা যাক $x \in A \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$ [যেহেতু $A \subseteq B$]

$\Rightarrow x \in A \cap B$.

$\therefore \quad A \subseteq A \cap B$.

কিন্তু আমরা জানি $A \cap B \subseteq A$.

অতএব $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

(খ) ধরা যাক $A \cap B = A$ আমরা প্রমাণ করবো $A \subseteq B$

এখন $x \in A \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$ [$\therefore A = A \cap B$]

$\Rightarrow x \in B$

অতএব $A \subseteq B$.

অতএব $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

6·21 দুটি সংহতির ভেদ : ধরা যাক A এবং B দুটি সংহতি। A সংহতির সেই সমস্ত সদস্য নিয়ে একটি সংহতি গঠন করা হ'লো যারা B সংহতিটির সদস্য নয় তাহলে এই নূতন সংহতিটিকে দুটি সংহতির ভেদ বলা হবে এবং $A - B$ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

এবং $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

তাহলে $A - B = \{1, 2, 3\}$ এবং $B - A = \{7, 8, 9, 10\}$

6·22 তত্ত্ব 12. যদি A এবং B দুটি সংহতি হয় তাহলে প্রমাণ করুন $A \cap (B - A) = \phi$.

প্রমাণ : এটি প্রমাণ করতে গেলে আমাদের দেখাতে হবে

(ক) $A \cap (B - A) \subseteq \phi$. (খ) $\phi \subseteq A - (B - A)$.

(ক) ধরা যাক $x \in A \cap (B - A)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B - A$.

$\Rightarrow x \in A$ এবং $\{x \in B$ কিন্তু $x \notin A\}$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $\{x \notin A$ কিন্তু $x \in B\}$

$\Rightarrow \{x \in A$ এবং $x \notin A\}$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in \phi$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in \phi$.

অতএব $A \cap (B - A) \subseteq \phi$.

(খ) আমরা জানি ϕ সংহতিটি প্রত্যেক সংহতির সহ সংহতি অর্থাৎ $\phi \subseteq A \cap (B - A)$.

$\therefore$ (ক) এবং (খ) থেকে আমরা বলতে পারি $A \cap (B - A) = \phi$.

6·23 তত্ত্ব 13. যদি A এবং B দুটি সংহতি হয় তাহলে প্রমাণ করুন $A \cup B = (A - B) \cup B$.

প্রমাণ : আমরা প্রমাণ করবো (ক) $A \cup B \subseteq (A - B) \cup B$

(খ) $(A - B) \cup B \subseteq A \cup B$

(ক) ধরা যাক $x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ বা $x \in A$

$\Rightarrow \{ x \in B$ বা $x \in A \}$ এবং $\{ x \in B$ বা $x \notin B \}$

$\Rightarrow x \in B$ বা $(x \in A$ এবং $x \notin B)$

$\Rightarrow x \in B$ বা $x \in A - B$

$\Rightarrow x \in A - B$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in (A - B) \cup B$

অতএব $A \cup B \subseteq (A - B) \cup B$

(খ) ধরা যাক $x \in (A - B) \cup B$

$\Rightarrow x \in A - B$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ বা $x \in A - B$

$\Rightarrow x \in B$ বা $\{ x \in A$ এবং $x \notin B \}$

$\Rightarrow \{x \in B$ বা $x \in A\}$ এবং $\{ x \in B$ বা $x \notin B \}$

$\Rightarrow \{ x \in A$ বা $x \in B \}$ এবং $\{x \in B$ বা $x \in B\}$

$\Rightarrow x \in A$ বা $x \subset B$

$\Rightarrow x \in A \cup B.$

অতএব $(A - B) \cup B \subseteq A \cup B.$

সুতরাং (ক) এবং (খ) থেকে স্পষ্টই বলা যায়

$$A \cup B = (A - B) \cup B.$$

6·24 সংজ্ঞা ঃ সংহতির পূরক (Complement of a set). U একটি সার্বভৌমিক সংহতি এবং A একটি সংহতি। তাহলে U—A'কে A সংহতির পূরক সংহতি বলা হবে। এটিকে কখনও A' আবার কখনও C(A) প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

মনে রাখা প্রয়োজন যদি $x \in A \Rightarrow x \notin A'$.

আবার $x \in A' \Rightarrow x \notin A$.

6·25 তত্ত্ব 14. প্রমাণ করুন $A - B = A \cap B' = B' - A'$.

প্রমাণ ঃ প্রথমে আমরা প্রমাণ করবো $A - B = A \cap B'$.

6

ধরা যাক $x \in A-B$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B'$.

$\therefore \quad A-B=A \cap B' \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

এবার আমরা প্রমাণ করবো $A-B=B'-A'$.

ধরা যাক $x \in A-B \Leftrightarrow x \in A$ এবং $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \notin A'$ এবং $x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in B'$ এবং $x \in A$

$\Leftrightarrow x \in B'-A'$.

অতএব আমরা পেলাম $A-B=B'-A' \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে পাই

$$A-B=A \cap B'=B'-A'.$$

6·26 তত্ত্ব 15. প্রমাণ করুন $A-B=\phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

প্রমাণ ঃ $A-B=\phi$

$\Rightarrow A \cap B'=\phi$ (পূর্বের তত্ত্বটি দ্রষ্টব্য)

$\Rightarrow A$ এবং B' বিচ্ছেদিত

$\Rightarrow x \in A \Rightarrow x \notin B'$

$\Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$

$\Rightarrow A \subseteq B. \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

বিপরীতক্রমে ধরা যাক $A \subseteq B$.

তাহলে $A-B=\{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$

$=\{x : x \in B$ এবং $x \notin B\}$

$=\phi \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (ii)

(i) এবং (ii) থেকে আমরা বলতে পারি $A-B=\phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

6·27 তত্ত্ব 16. প্রমাণ করুন $A-B=A \Leftrightarrow A\cap B=\phi$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $A-B=A$.

তাহলে $x \in A\cap B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in A-B$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow \{ x\in A$ এবং $x\notin B \}$ এবং $x\in B$

$\Rightarrow \{ x\in A \}$ এবং $\{ x\in B$ এবং $x\notin B \}$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x\in\phi$

$\Rightarrow x \in\phi$.

এবং $A-B=A \Rightarrow A\cap B \subseteq \phi$ কিন্তু $\phi \subseteq A\cap B$.

অতএব $A-B=A\Rightarrow A\cap B=\phi$.

বিপরীতক্রমে ধরা যাক $A\cap B=\phi$.

আমরা ধরে নিলাম $x\in A \Rightarrow x \in A$ এবং $\{ x \in B$ বা $x\notin B \}$

$\Rightarrow \{ x\in A$ এবং $x \in B \}$

বা $\{ x \in A$ এবং $x \notin B \}$

$\Rightarrow x \in A\cap B$ বা $x \in A-B$

$\Rightarrow x \in \phi$ বা $x \in A-B$

$\Rightarrow x \in A-B$.

তাহলে আমরা পেলাম $A\cap B=\phi \Rightarrow A \in A-B$

কিন্তু $A-B\subseteq A$

অতএব $A\cap B=\phi \Rightarrow A-B=A$.

6·28 তত্ত্ব 17. প্রমাণ করুন $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$.

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $A\subseteq B$ তাহলে আমাদের প্রমাণ করতে হবে $A\cup B=B$

ধরা যাক $x \in A\cup B \Rightarrow x\in A$ বা $x \in B$.

$\Rightarrow x \in B$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in B.$

সুতরাং আমরা পেলাম $A \cup B \subseteq B$

কিন্তু আমরা জানি B সংহতিটি সর্বদাই $A \cup B$ সংহতিটির সহ সংহতি।

অতএব $A \subseteq B \Rightarrow A \subset B = B.$

বিপরীতক্রমে ধরা যাক $A \cup B = B$ তাহলে প্রমাণ করতে হবে $A \subseteq B.$

ধরা যাক $x \in A \Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in B.$

সুতরাং $A \subseteq B$

অতএব $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$

6·29 তত্ত্ব 18. প্রমাণ করুন $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A.$

প্রমাণ : ধরা যাক $A \subseteq B$ আমাদের প্রমাণ করতে হবে $A \cap B = A.$

ধরা যাক $x \in A \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B.$

অতএব $A \subseteq A \cap B$ কিন্তু $A \cap B \subseteq A.$

সুতরাং $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A.$

বিপরীতক্রমে ধরা যাক $A \cap B = A$ তাহলে প্রমাণ করুন $A \subseteq B$

ধরা যাক $x \in A = A \cap B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in B.$

$\therefore \quad A \subseteq B$

অর্থাৎ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A.$

6·30 তত্ত্ব 19. প্রমাণ করুন $[C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B] \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B.$

প্রমাণ : ধরা যাক $C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B$ তাহলে প্রমাণ করতে $C \subseteq A \cap B.$

ধরা যাক $x \in C \Rightarrow x \in C$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cap B.$

$\therefore \quad C \subseteq A \cap B.$

অতএব $[C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B] \Rightarrow C \subseteq A \cap B.$

বিপরীতক্রমে $C \subseteq A \cap B$ তাহলে প্রমাণ করতে হবে

$C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B$

$x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in A.$

অতএব $C \subseteq A.$

অনুরূপভাবে ধরা যাক $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in B.$

অতএব $C \subseteq B.$

তাহলে আমরা পেলাম $C \subseteq A \cap B \Rightarrow C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B.$

অর্থাৎ আমরা দেখতে পাচ্ছি

$[C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B] \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B.$

6·31 তত্ত্ব 20. প্রমাণ করুন $B \subset A \Rightarrow B \cup C \subseteq A \cup C$ এবং $B \cap C \subseteq A \cap C.$

প্রমাণ ঃ $x \in B \cup C \Rightarrow x \in B$ বা $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ বা $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cup C.$

এখানে আমরা পেলাম $B \subseteq A$ হলে

যে কোন $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup C.$

অর্থাৎ $B \cup C \subseteq A \cup C.$

ধরা যাক $y \in B \cap C \Rightarrow y \in B$ এবং $y \in C$

$\Rightarrow y \in A$ এবং $y \in C$

$\Rightarrow y \in A \cap C.$

অতএব $B \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq A \cup C.$

6·32 তত্ত্ব 21. প্রমাণ করুন $[A \subseteq C$ এবং $B \subseteq C] \Rightarrow A \cap B \subseteq C$

প্রমাণ : ধরা যাক $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in C$ বা $x \in C$

$\Rightarrow x \in C$

অতএব যদি $[A \subseteq C$ এবং $B \subset C]$ হয় তাহলে

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in C.$

অর্থাৎ $A \cup B \subseteq C.$

6·33 তত্ত্ব 22. প্রমাণ করুন $A \supseteq B \Rightarrow A - C \supseteq B - C.$

প্রমাণ : ধরা যাক $x \in B - C \Rightarrow x \in B$ এবং $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A - C.$

অতএব $A \supseteq B \Rightarrow B - C \subseteq A - C$

$\Rightarrow A - C \supseteq B - C$

6·34 তত্ত্ব 23. প্রমাণ করুন $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B.$

প্রমাণ : ধরা যাক $A \cup B = A \cap B$ আমাদের প্রমাণ করতে হবে $A = B.$

ধরা যাক $x \in A \Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in B.$

অতএব $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A \subseteq B$

আবার $x \in B \Rightarrow x \in B$ বা $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in A$

অতএব $A \cup B = A \cap B \Rightarrow B \subseteq A.$

সুতরাং $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$

$\Rightarrow A = B.$

বিপরীতক্রমে ধরা যাক $A = B$ তাহলে দেখাতে হবে

$$A \cup B = A \cap B.$$

ধরা যাক $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in A$ বা $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B.$

অতএব $A = B \Rightarrow A \cup B \subseteq A \cap B$ ... (i)

আবার $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ বা $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup B.$

$\therefore \quad A = B \Rightarrow A \cap B \subseteq A \cup B$ ... (ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে পাই

$A = B \Rightarrow A \cup B \subseteq A \cap B$ এবং $A \cap B \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow A \cup B = A \cap B$

অতএব $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

6·35 তত্ত্ব 24. প্রমাণ করুন $A-(A-B)=A\cap B$.

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x \in A-(A-B)$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $x \notin A-B$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $\{\sim x \in A-B\}$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $\{\sim (x \in A$ এবং $x \notin B)\}$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $\{\sim x \in A$ বা $x \notin B\}$

$\Leftrightarrow x \in A$ এবং $\{x \notin A$ বা $x \in B\}$

$\Leftrightarrow (x \in A$ এবং $x \notin A)$ বা $(x \in A$ এবং $x \in B)$

$\Leftrightarrow x \in \phi$ বা $x \in A \cap B$ $[\therefore\ x \notin \phi]$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$.

অতএব $A-(A-B)=A\cap B$.

6·36 তত্ত্ব 25. প্রমাণ করুন

$$(A-B) \cup (B-A)=(A\cup B)-(A\cap B).$$

প্রমাণ ঃ $x \in (A-B) \cup (B-A)$

$\Leftrightarrow x \in (A-B)$ বা $x \in (B-A)$

$\Leftrightarrow (x \in A$ এবং $x \notin B)$ বা $(x \in B$ এবং $x \notin A)$

$\Leftrightarrow \{(x \in A$ এবং $x \notin B)$ বা $x \in B\}$ এবং $\{(x \in A$ এবং $x \notin B)$ বা $x \notin A\}$

$\Leftrightarrow \{x \in B$ বা $(x \in A$ এবং $x \notin B)\}$ এবং $\{x \notin A$ বা $(x \in A$ এবং $x \notin B)\}$

$\Leftrightarrow \{(x \in B$ বা $x \in A)$ এবং $(x \in B$ বা $x \notin B)\}$ এবং $\{(x \notin A$ বা $x \in A)$ এবং $(x \notin A$ বা $x \notin B)\}$

$\Leftrightarrow \{(x \in A$ বা $x \in B)$ এবং $(x \in B$ বা $x \notin B)\}$ এবং $\{(x \notin A$ বা $x \in A)$ এবং $(x \notin A$ বা $x \notin B)\}$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ এবং $x \notin A \cap B$.

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$

অতএব $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

6·37 তত্ত্ব 26. প্রমাণ করুন $\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}' = \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n'\right\}$

প্রমাণ : ধরা যাক $x \in \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}' \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\Leftrightarrow x \notin A_n \ \forall n$$

$$\Leftrightarrow x \in A_n' \ \forall n$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n'$$

$$\therefore \quad \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}' = \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n'\right\}$$

6·38 সংজ্ঞা : সংহতিদ্বয়ের গুণন (Product of two sets) A এবং B দুটি সংহতি। তাহলে

$A \times B = \{(a_i, b_i) : a_i \in A, b_i \in B\}$ 'কে সংহতিদ্বয়ের গুণন বলা হয়। দৃষ্টান্তস্বরূপ ধরা যাক $A = (1, 2, 3)$ এবং $B = (4, 5)$

এখন $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

অথবা $A \times B = \{(a_i, b_i) ; a_i \in A, b_i \in B\}$.

6·39 সংজ্ঞা : প্রতিসম ভেদ (Symmetric difference). ধরা যাক A এবং B দুটি সংহতি, তাহলে $(A-B) \cup (B-A)$ 'কে প্রতিসম ভেদ বলা হয়। এই প্রতিসম ভেদকে $A \triangle B$ প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়। যেহেতু দুটি সংহতির সমন্বয় বিনিময়যোগ্য সূত্র মেনে চলে সুতরাং $(A-B) \cup (B-A) = (B-A) \cup (A-B)$.

অর্থাৎ $A \triangle B = B \triangle A$

অর্থাৎ প্রতিসম ভেদ বিনিময়যোগ্য সূত্র মেনে চলে।

6·40 তত্ত্ব 27

প্রমাণ করুন (ক) $A \triangle A = \phi$

(খ) $A \triangle \phi = A$

(গ) $A \triangle B = \phi \Leftrightarrow A = B$

প্রমাণ (ক) $A \triangle A = (A-A) \cup (A-A)$

$= \phi \cup \phi$

$= \phi.$

(খ) $A \triangle \phi = (A-\phi) \cup (\phi - A)$

$= A \cup \phi$

$= A.$

(গ) $A \triangle B = \phi \Leftrightarrow (A-B) \cup (B-A)$

$\Leftrightarrow A-B=\phi$ এবং $B-A=\phi.$

$\Leftrightarrow A=B.$

6·41 তত্ত্ব **28.** যদি $A \subset B$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন

$$A \times A \subset (A \times B) \cap (B \times A).$$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $(x, y) \in A \times A$ এবং $x \in A, y \in A.$

যেহেতু $A \subset B \Rightarrow x \in B, y \in B.$

এখন $x \in A, y \in B \Rightarrow (x, y) \in A \times B.$

$x \in B, y \in A \Rightarrow (x, y) \in B \times A.$

অতএব $(x, y) \in A \times B$ এবং $B \times A.$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A).$

অতএব $A \times A \subset (A \times B) \cap (B \times A).$

6·42. তত্ত্ব **29.** প্রমাণ করুন $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $(x, y) \in A \times (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $y \in B \cup C.$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $\{y \in B$ বা $y \in C\}$

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $y \in B)$ বা

$(x \in A$ এবং $y \in C)$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times B$ বা $(x, y) \in A \times C$

$= (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

অতএব $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C) \cdots (i)$

আবার ধরা যাক $(a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

$\Rightarrow (a, b) \in A \times B$ বা $A \times C$

$\Rightarrow (a \in A, b \in B)$ বা $(a \in A$ এবং $b \in C)$

$\Rightarrow a \in A$ এবং $(b \in B$ বা $b \in C)$

$\Rightarrow a \in A$ এবং $b \in (B \cup C)$

$\Rightarrow (a, b) \in A \times (B \cup C)$.

অর্থাৎ $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$. $\cdots$ (ii)

অতএব (i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

6·43 তত্ত্ব 30. প্রমাণ করুন $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

প্রমাণ : ধরা যাক $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $y \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A, (y \in B$ এবং $y \in C)$

$\Rightarrow (x \in A, y \in B)$ এবং $(x \in A, y \in C)$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in (A \times C)$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

অতএব $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ .... (i)

অনুরূপভাবে আমরা দেখাতে পারি

$$(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C). \quad .... \quad (ii)$$

অতএব (i) এবং (ii) থেকে আমরা বলতে পারি

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C).$$

6·44 তত্ত্ব 31. প্রমাণ করুন

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D).$$

প্রমাণ : $(x, y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$

$\Rightarrow (x, y)\in A\times B$ এবং $(x, y)\in C\times D$

$\Rightarrow \{x\in A, y\in B\}$ এবং $\{x\in C, y\in D\}$

$\Rightarrow \{x\in A$ এবং $x\in C\}$ এবং $\{y\in B, y\in D\}$

$\Rightarrow x\in A\cap C, y\in B\cap D$

$\Rightarrow (x, y)\in(A\cap C)\times(B\cap D).$

অতএব $(A\times B)\cap(C\times D)\subseteq(A\cap C)\times(B\cap D)$ ··· (i)

অনুরূপভাবে আমরা প্রমাণ করতে পারি

$$(A\cap C)\times(B\cap D)\subseteq(A\times B)\cap(C\times D) \quad .... \quad (ii)$$

এখন (i) এবং (ii) থেকে আমরা সহজেই বলতে পারি

$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D).$

6·45 তত্ত্ব 32. প্রমাণ করুন $A\cup B=(A\,\triangle\,B)\triangle(A\cap B)$

প্রমাণ : $(A\,\triangle\,B)\,\triangle\,A\cap B.$

$=\{(A-B)\cup(B-A)\}\,\triangle\,(A\cap B)$

$=\{(A-B)\cup(B-A)-(A\cap B)\}\cup\{(A\cap B)$
$-(A-B)\cup(B-A)\}$

$=\{(A-B)\cup(B-A)\}\cup(A\cap B)$

$=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$

$=A\cup B.$

6·46 তত্ত্ব 33. $A\cap(B \triangle C)=(A\cap B) \triangle (A\cap C)$

প্রমাণ ঃ $A \cap (B \triangle C)=A\cap\{(B-C) \cup (C-B)\}$

$=\{A\cap(B-C)\} \cup \{A\cap(C-B)\}$

$=\{(A\cap B)-(A\cap C)\} \cup \{(A\cap C)-(A\cap B)\}$

$=(A\cap B)\triangle(A\cap C).$

6·47 তত্ত্ব 34. A, B এবং C যে কোন তিনটি সংহতি। প্রমাণ করুন $A\cap (B\cup C)=(A\cap B) \cup (A\cap C).$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x\in A\cap(B\cup C)$

$\Rightarrow x\in A$ এবং $x\in B \cup C$

$\Rightarrow x\in A$ এবং $\{x\in B$ বা $x\in C\}$

[*স্বতসত্য (Tautology) $p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q) \vee (p\wedge r)$]

$\Rightarrow (x\in A$ এবং $x\in B)$ বা $(x\in A$ এবং $x\in C)$

$\Rightarrow x\in(A\cap B)$ বা $x\in(A\cap C)$

$\Rightarrow x\in(A\cap B) \cup (A\cap C)$

অর্থাৎ $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B) \cup (A\cap C)$ .... (i)

এবার ধরা যাক,

$y\in (A\cap B) \cup (A\cap C)$

$\Rightarrow y\in(A\cap B)$ বা $y\in (A\cap C)$

$\Rightarrow (y\in A$ এবং $y\in B)$ বা $(y\in A$ এবং $y\in C)$

$\Rightarrow y \in A$ এবং $\{y\in B$ বা $y\in C\}$

$\Rightarrow y\in A$ এবং $(y\in B\cup C)$

$\Rightarrow y\in A\cap (B\cup C)$

---

*স্বতসত্য ঃ যে বাক্য আবশ্যিকভাবে, অনিবার্যভাবে, আকারবশতঃ সত্য তাকে বলে স্বতসত্য (বাক্য)।

অতএব $(A\cap B) \cup (A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C)$ .... (ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে পাই

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B) \cup (A\cap C).$$

6·48 তত্ত্ব 35. A, B এবং C তিনটি সংহতি হলে প্রমাণ করুন

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B) \cap (A\cup C).$$

প্রমাণঃ ধরা যাক $x\in A\cup(B\cap C)$

$\Rightarrow x\in A$ বা $x\in B\cap C$

$\Rightarrow x\in A$ বা $\{x\in B$ এবং $x\in C\}$

[টটোলজি $p\vee (q\wedge r) \Leftrightarrow (p\vee q) \wedge (p\vee r)$]

$\Rightarrow (x\in A$ বা $x\in B)$ এবং $(x\in A$ বা $x\in C)$

$\Rightarrow x \in(A\cup B)$ এবং $x\in(A\cup C)$

$\Rightarrow x\in(A\cup B) \cap (A\cup C)$

অর্থাৎ আমরা পেলাম $A\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)\cdots$(i)

আবার ধরা যাক $y\in(A\cup B) \cap (A\cup C)$

$\Rightarrow y\in(A\cup B)$ এবং $y\in(A\cup C)$

$\Rightarrow (y\in A$ বা $y\in B)$ এবং $(y\in A$ বা $y\in C)$

$\Rightarrow y\in A$ বা $(y\in B$ এবং $y\in C)$.

$\Rightarrow y\in A$ বা $(y\in B\cap C)$

$\Rightarrow y\in A\cup (B\cap C).$

অর্থাৎ আমরা এক্ষেত্রে পেলাম

$(A\cup B) \cap (A\cup C) \subseteq A\cup (B\cap C).$ ... (ii)

অতএব (i) এবং (ii) থেকে আমরা পেলাম

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B) \cap (A\cup C).$$

6·49 তত্ত্ব 36. A, B এবং C তিনটি সংহতি হলে প্রমাণ করুন

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C).$$

প্রমাণ : ধরা যাক $x\in A-(B\cup C)$

$$\Rightarrow x\in A \text{ এবং } x\notin(B\cup C)$$

এখন $x\notin(B\cup C)\Rightarrow x\in B\cup C$ এর নঙ্‌র্থক বক্তব্য।

অর্থাৎ $x\in B$ বা $x\in C$ এর নঙ্‌র্থক বক্তব্য।

[কিন্তু $\sim(p\vee q)\Leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$ একটি টটোলজি]

$\therefore\ x\notin(B\cup C)\Rightarrow x\notin B$ এবং $x\notin C$

$\therefore\ x\in A-(B\cup C)\Rightarrow x\in A$ এবং ($x\notin B$ এবং $x\notin C$)

$\Rightarrow$ ($x\in A$ এবং $x\notin B$) এবং ($x\in A$ এবং $x\notin C$).

[টটোলজি $p\wedge(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge(p\wedge r)$].

$\Rightarrow x\in(A-B)$ এবং $x\in(A-C)$.

$\Rightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$

অর্থাৎ $A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cap(A-C)$ · · (i)

আবার ধরা যাক $y\in(A-B)\cap(A-C)$

$\Rightarrow y\in(A-B)$ এবং $y\in(A-C)$

$\Rightarrow$ ($y\in A$ এবং $y\notin B$) এবং ($y\in A$ এবং $y\notin C$)

$\Rightarrow y\in A$ এবং ($y\notin B$ এবং $y\notin C$)

$\Rightarrow y\in A$ এবং ($y\notin B\cup C$)

$\Rightarrow y\in A-(B\cup C)$

অর্থাৎ $(A-B)\cap(A-C)\subseteq A-(B\cup C)$ .... (ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে পাই

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C).$$

6·50 তত্ত্ব 37. A, B এবং C তিনটি সংহতি হলে প্রমাণ করুন

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x\in A-(B\cap C)$

$$\Rightarrow x\in A \text{ এবং } x\notin B\cap C.$$

$x\notin B\cap C$ বক্তব্যটি $x\in B\cap C$ এর নঙর্থক বক্তব্য অর্থাৎ ($x\in B$ এবং $x\in C$) এর নঙর্থক বক্তব্য

[কিন্তু $\sim(p\wedge q)\Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ একটি টটোলজি]

$\therefore\ x\notin B\cap C \Leftrightarrow x\notin B$ বা $x\notin C$,

$\therefore\ x\in A-(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ এবং ($x\notin B$ বা $x\notin C$)

$\Rightarrow$ ($x\in A$ এবং $x\notin B$) বা ($x\in A$ $x\notin C$)

$\Rightarrow x\in(A-B)$ বা $x\in(A-C)$

$\Rightarrow x\in(A-B)\cup(A-C)$

অর্থাৎ $A-(B\cap C)\subseteq(A-B)\cup(A-C)$ ... (i)

আবার ধরা যাক,

$y\in(A-B)\cup(A-C)\Rightarrow y\in(A-B)$ বা $y\in(A-C)$

$\Rightarrow$ ($y\in A$ এবং $y\notin B$) বা ($y\in A$ এবং $y\notin C$)

$\Rightarrow y\in A$ এবং ($y\notin B$ বা $y\notin C$)

$\Rightarrow y\in A$ এবং $y\notin B\cap C$

$\Rightarrow y\in A-(B\cap C)$

অর্থাৎ $(A-B)\cup(A-C)\subseteq A-(B\cap C)$ ... (ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে পাই $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

সপ্তম অধ্যায়

বর্ণনামূলক সংহতিতত্ত্ব

7·1 সংজ্ঞা : পরিণাম বিন্দু (Limiting point). ধরা যাক A একটি সংহতি এবং $x \in A$। এখন x'কে A-সংহতির পরিণাম বিন্দু বলা হবে যদি x'কে ঘিরে যে কোন প্রতিবেশী অঞ্চল (neighbourhood) G গঠন করা যায় এবং এই প্রতিবেশী অঞ্চলে x ব্যতীত A-সংহতিটির অন্য কোন সদস্য অবস্থান করে।

অর্থাৎ $(G-x) \cap A \neq \phi$ এখানে G-কে প্রতিবেশী অঞ্চল বলে ধরা হবে।

7·2 সংজ্ঞা : রুদ্ধ সংহতি (Closed set). যে কোন সংহতি A-কে রুদ্ধ সংহতি বলা হবে যদি A-সংহতিটির সমস্ত পরিণাম বিন্দুগুলি ঐ A-সংহতিটির মধ্যে অবস্থান করে।

দৃষ্টান্তস্বরূপ ধরা যাক $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots \frac{1}{n}, \cdots\cdots 0\}$

এখানে 0 হচ্ছে A-সংহতিটির পরিণাম বিন্দু এবং $0 \in A$ অতএব A-সংহতিটি রুদ্ধ।

7·3 সংজ্ঞা : অন্তস্থ বিন্দু (Interior point). যে কোন বিন্দু x'-কে A-সংহতির অন্তস্থ বিন্দু বলা হবে যদি $\exists$ G যার মধ্যে x অবস্থান করবে এবং $G \subset A$ হয়। অর্থাৎ $x \in G \subset A$.

7·4 সংজ্ঞা : উন্মুক্ত সংহতি (Open set). যদি কোন সংহতির প্রত্যেকটি বিন্দুই অন্তস্থ হয় তাহলে ঐ সংহতিটিকে উন্মুক্ত সংহতি বলা হবে।

7·5 তত্ত্ব 1 : যদি $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ সংহতিগুলির প্রত্যেকটিই উন্মুক্ত হয় তাহলে $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ উন্মুক্ত হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

এখন মনে করা যাক $x \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\Rightarrow x \in A_n$ n-এর নির্দিষ্ট একটি মানের জন্য

$\Rightarrow$ একটি প্রতিবেশী অঞ্চল G সংজ্ঞানুযায়ী পাওয়া যাবে যার মধ্যে x অবস্থান করবে এবং $G \subset A_n$ হবে।

$\Rightarrow x \in G \subset A_n \subset A$

$\Rightarrow x \in G \subset A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

এ থেকে আমরা বলতে পারি $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ উন্মুক্ত।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n, \ldots\ldots\ldots$ সংহতিগুলির প্রত্যেকটি উন্মুক্ত হয় তাহলে $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ উন্মুক্ত নাও হতে পারে।

এই অনুসিদ্ধান্তটি প্রমাণ করতে গেলে আমরা একটি উদাহরণের সাহায্য নেব।

ধরা যাক $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$। তাহলে $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$.

এটি একটি রুদ্ধ সংহতি।

7·6 তত্ত্ব 2 ঃ $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ সংহতিগুলির প্রত্যেকটি উন্মুক্ত হ'লে $\bigcap_{n=1}^{n} A_n$ উন্মুক্ত হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $A = \bigcap_{r=1}^{n} A_n$

তাহলে আমরা দুটি ঘটনার সম্মুখীন হব,

(ক) $A = \phi$ এবং (খ) $A \neq \phi$.

(ক) যখন $A = \phi$ তখন A উন্মুক্ত সংহতি। কারণ ϕ'কে উন্মুক্ত সংহতি বলে ধরা হয়ে থাকে।

(খ) $x \in A = \bigcap_{r=1}^{n} A_r$

$\Rightarrow x \in A_r \ \forall r.$

$\Rightarrow$ x-কে ঘিরে একটি প্রতিবেশী অঞ্চল (α_r, β_r) পাব, যার ফলে

$(\alpha_r, \beta_r) \subset A_r$ হয়।

ধরা যাক $\alpha = max\ (\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$

এবং $\beta = max\ (\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \beta_n)$

তাহলে $x \in (\alpha, \beta) \subset A_r$

স্বাভাবিকভাবেই বলা যায় $x \in (\alpha, \beta) \subset \bigcap_{r=1}^{n} A_r = A$

স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে x বিন্দুটি A-সংহতিটির অন্তস্থ বিন্দু। এবং যেহেতু x-কে পছন্দমতো নেওয়া হয়েছে অতএব আমরা বলতে পারি A-র প্রত্যেকটি বিন্দুই অন্তস্থ বিন্দু। অর্থাৎ $A = \bigcap_{r=1}^{n} A_r$ উন্মুক্ত।

7·7 সংজ্ঞা : উদ্ভূত সংহতি (Derived set). যদি কোন সংহতির পরিণাম বিন্দুগুলি নিয়ে একটি সংহতি গঠন করা যায় তাহলে ঐ নূতন সংহতিটিকে উদ্ভূত সংহতি বলা হবে।

যদি A একটি সংহতি হয় তাহলে A-সংহতি থেকে জাত উদ্ভূত সংহতিকে D(A) প্রতীক চিহ্ন দিয়ে লেখা হয়। প্রসঙ্গক্রমে বলা প্রয়োজন যে কোন সংহতি রুদ্ধ হবে যদি $D(A) \subset A$ হয়।

7·8 তত্ত্ব 3 : $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n \ldots\ldots\ldots$ সংহতিগুলির প্রত্যেকটি রুদ্ধ হলে প্রমাণ করুন $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ রুদ্ধ হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A \subset A_n \ \forall n \in N$

(N ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সংহতি)

$\Rightarrow D(A) \subset D(A_n)$

$$\Rightarrow D(A) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A_n) \quad \text{(i)}$$

যেহেতু প্রত্যেকটি A_n রুদ্ধ অতএব

$$D(A_n) \subseteq A_n$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই $D(A) \subset A$

অর্থাৎ $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ রুদ্ধ

অনুসিদ্ধান্ত : $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n\ldots\ldots\ldots$ সংহতিগুলির প্রত্যেকটি রুদ্ধ হলে $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ রুদ্ধ নাও হতে পারে। এই অনুসিদ্ধান্তটি প্রমাণের জন্য একটি উদাহরণই যথেষ্ট।

ধরা যাক

$A_n = \left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$ একটি রুদ্ধ সংহতি।

তাহলে $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, \tfrac{1}{2}] \cup [0, \tfrac{1}{3}] \cup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [0, 1]$

$= [0, 1]$ একটি উপ-উন্মুক্ত (semi open) সংহতি।

$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ রুদ্ধ নয়।

7·9 তত্ত্ব 4 : A_1, A_2 রুদ্ধ সংহতি হলে $A_1 \cup A_2$ রুদ্ধ হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক $A = A_1 \cup A_2$

এখন আমরা যে কোন একটি উপাদান (element) x নিলাম এবং

$$x \in D(A) \Rightarrow x \in D(A_1 \cup A_2)$$

$$\Rightarrow x \in D(A_1) \cup D(A_2)$$

$$\Rightarrow x \in D(A_1) \text{ বা } x \in D(A_2)$$

$$\Rightarrow x \in D(A_1) \subset A_1$$

বা $x \in D(A_1) \subset A_2$ [যেহেতু A_1, A_2 রুদ্ধ]

$\Rightarrow x \in A_1$ বা $x \in A_2$

$\Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \Rightarrow x \in A$

সুতরাং আমরা দেখতে পেলাম $x \in D(A) \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow D(A) \subset A$

অতএব A-সংহতিটি রুদ্ধ।

7·10 তত্ত্ব 5 : X একটি সংহতি এবং $F \subset X$, তাহলে F রুদ্ধ হলে C(F) উন্মুক্ত হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক F রুদ্ধ তাহলে $D(F) \subset F$.

আমরা দেখাবো C(F) উন্মুক্ত।

ধরা যাক $x \in C(F) \Rightarrow x \notin F$

$D(A) \subset F, x \notin F \Rightarrow x \notin D(F) \subset F$

$\Rightarrow \exists G$ যার ফলে $(G - x) \cap A = \phi$

$\Rightarrow G \cap F = \phi$

$\Rightarrow G \subset X - F$

$\Rightarrow G \subset C(F)$.

$\therefore$ C(F) উন্মুক্ত।

এবার ধরা যাক C(F) উন্মুক্ত। আমরা দেখাবো F রুদ্ধ।

C(F) উন্মুক্ত হেতু $\exists$ G যার ফলে $G \subset C(F)$.

$\Rightarrow G \cap F = \phi$

$\Rightarrow (G - x) \cap F = \phi$

$\Rightarrow x \notin D(F)$

অতএব যে কোন $x \in C(F) \Rightarrow x \notin D(F)$

যে কোন $x \in X - F \Rightarrow x \in X - D(F)$

$\Rightarrow X - F \subset X - D(F)$

$$\Rightarrow D(F) \subset F$$

$\therefore$ F রুদ্ধ।

7·11 কতকগুলি সংজ্ঞা।

স্বঘন (Dense in itself) **সংহতি ঃ** কোন একটি সংহতিকে স্বঘন সংহতি বলা হবে যদি এর প্রত্যেকটি বিন্দুই (সদস্য) সংহতিটির পরিণাম বিন্দু হয়। দৃষ্টান্তস্বরূপ বলা যায় [0, 1] অন্তরে অবস্থিত মূলদ রাশির সংহতি স্বঘন।

সার্বিক ঘন (Everywhere dense) **সংহতি ঃ** কোন একটি সংহতিকে $[a, b]$ অন্তরে সার্বিক ঘন বলা হবে যদি $[a, b]$-স্থিত যে কোন ক্ষুদ্র সহ অন্তর $[a_1, b_1]$-এ ঐ সংহতিটির বিন্দু অবস্থান করে।

অঘন সংহতি (Non-dense set). কোন একটি সংহতিকে $[a, b]$ অন্তরে অঘন সংহতি বলা হবে যদি $[a, b]$-স্থিত যে কোন ক্ষুদ্র সহ-অন্তর $[a_1, b_1]$ এর মধ্যে আর একটি সহ-অন্তর $[a_1, b_1]$ পাওয়া যায়, যার মধ্যে ঐ সংহতিটির কোন বিন্দু (সদস্য) থাকবে না।

উৎকৃষ্ট (Perfect) **সংহতি ঃ** যদি কোন সংহতি রুদ্ধ এবং স্বঘন হয় তাহলে ঐ সংহতিটিকে উৎকৃষ্ট সংহতি বলা হবে।

গণনানুক্রমী (Enumerable) **সংহতি ঃ** যদি একটি অসীম সংহতির সঙ্গে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার অসীম সংহতি $N=\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ 'এর একৈক প্রতিষঙ্গ (one-one correspondence) স্থাপিত করা যায় তাহলে ঐ অসীম সংহতিটিকে গণনানুক্রমী সংহতি বলা হবে।

অগণনানুক্রমী সংহতি (Non enumerable set) ঃ যদি একটি অসীম সংহতির সঙ্গে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সংহতি $N=\{1, 2, 3 \ldots n, \ldots\}$'এর সঙ্গে একৈক প্রতিষঙ্গ স্থাপন করা সম্ভব না হয় তাহলে ঐ অসীম সংহতিটিকে অগণনানুক্রমী সংহতি বলা হবে।

চিত্রণ (Mapping) ঃ অনেক সময় একটি নিয়ম 'f' অনুসারে একটি সংহতি X-এর প্রত্যেকটি সদস্যের সঙ্গে অপর একটি সংহতি Y-এর প্রত্যেকটি সদস্যের প্রতিষঙ্গ স্থাপন করা যায়। যদি X-সংহতিটির সমস্ত সদস্য 'f' চিত্র Y-এর সদস্য হয় তাহলে এই 'f' চিত্রগুলির সমষ্টিকে বলা হয় y সংহতিটির মধ্যে x সংহতিটির 'f' চিত্রণ (f mapping X in Y)

এবং $f : X \to Y$ এই সংকেত দিয়ে নির্দেশ করা হয়। যদি এই চিত্রণে x এবং y যথাক্রমে X এবং Y এর দুটি প্রতিষঙ্গী সদস্য হয় অর্থাৎ যদি y, x-এর চিত্র হয়, তাহলে $y = f(x)$ এই সমীকরণ দিয়ে এটিকে নির্দেশ করা হবে।

অন্তর্গত চিত্রণ (Into mapping) : ধরা যাক $f : A \to B$, এখন যদি $f(A) \subset B$ হয় তাহলে এই চিত্রণটিকে অন্তর্গত চিত্রণ বলা হবে। উদাহরণ-স্বরূপ ধরা যাক $A = (1, 2, 3, 4)$ এবং $B = (1, 8, 27, 64, 125)$ এখন $f : A \to B$ দ্বারা একটি চিত্রণ পাওয়া গেল। এখানে চিত্রণটিকে সংজ্ঞায়িত করা হচ্ছে $f(x) = x^3$. আমরা সহজেই দেখতে পাচ্ছি $f(A) \subset B$. অর্থাৎ এটি একটি অন্তর্গত চিত্রণ।

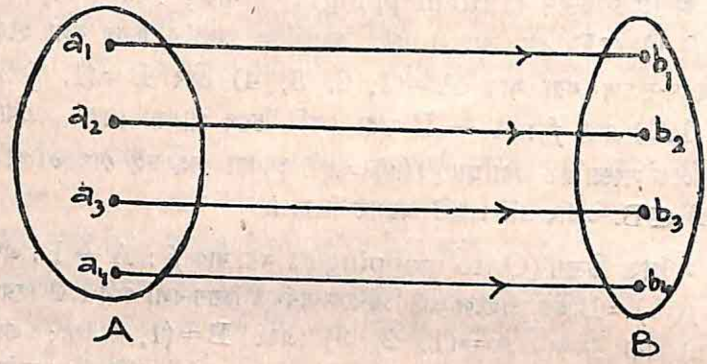
সর্বগত চিত্রণ (Onto mapping) : ধরা যাক $f : A \to B$, এখন যদি $f(A) = B$ হয় তাহলে এই চিত্রণকে সর্বগত চিত্রণ বলা হবে। উদাহরণ-স্বরূপ ধরা যাক $A = (1, 2, 3)$ এবং $B = (1, 4, 9)$; এখন $f : A \to B$ দ্বারা একটি চিত্রণ পাওয়া যাচ্ছে যেখানে চিত্রণটিকে সংজ্ঞায়িত করা হচ্ছে $f(x) = x^2$। আমরা সহজেই দেখতে পাচ্ছি $f(A) = B$ অতএব এটি একটি সর্বগত চিত্রণ।

একৈক চিত্রণ (One-one mapping) : ধরা যাক $f : A \to B$ এবং যদি A-সংহতিটির যে কোন দুটি ভিন্ন সদস্যের f চিত্র B-সংহতিটির দুটি পৃথক সদস্য পাওয়া যায় তাহলে এই চিত্রণকে একৈক চিত্রণ বলা হবে। অর্থাৎ $f : A \to B$, $x_1, x_2 \in A$ এবং $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ হলে আমরা এই চিত্রণকে একৈক চিত্রণ বলবো। উদাহরণস্বরূপ $f : (1, 2, 3) \to (1, 4, 9)$ এখানে $1 \neq 2 \Rightarrow f(1) \neq f(2)$ $[f(1) = 1, f(2) = 4]$

অতএব এটি একৈক চিত্রণ।

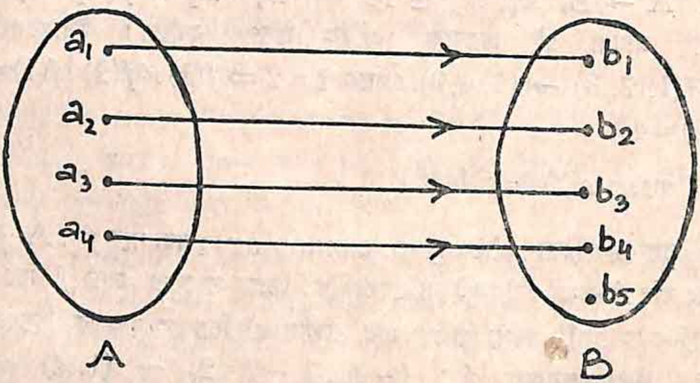
বহু-এক চিত্রণ (Many-one mapping) : ধরা যাক $f : A \to B$ এবং যদি A-সংহতিটির দুই বা ততোধিক ভিন্ন সদস্যের জন্য f চিত্র B-সংহতিটির একটি সদস্য পাওয়া যায় তাহলে এই চিত্রণকে বহু-এক চিত্রণ বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ $f : (-1, 1, -2, 2) \to (1, 4)$ এখানে $-1 \neq 1 \Rightarrow f(-1) = f(1)$ $[f(x) = x^2 \ \therefore \ f(-1) = f(1) = 1]$.

একৈক সর্বগত চিত্রণ (One-one onto mapping) : যদি $f: A \to B$ হয় এবং $x_1, x_2, \in A$ হয়। এখন যদি $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ এবং $f(A) = B$ হয়, তাহলে এই চিত্রণকে একৈক সর্বগত চিত্রণ বলা হবে।



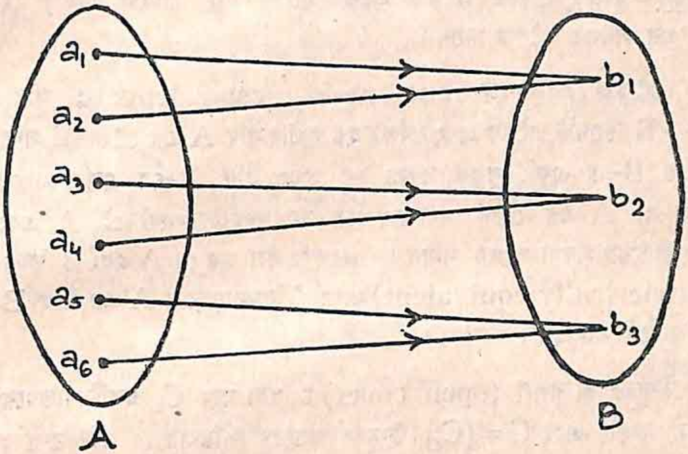
একৈক সর্বগত চিত্রণ

একৈক অন্তর্গত চিত্রণ (One-one into mapping) : যদি $f: A \to B$ হয় এবং $x_1, x_2, \in A$ হয়। এখন $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ এবং $f(A) \subset B$ হয়, তাহলে এই চিত্রণকে একৈক অন্তর্গত চিত্রণ বলা হবে।



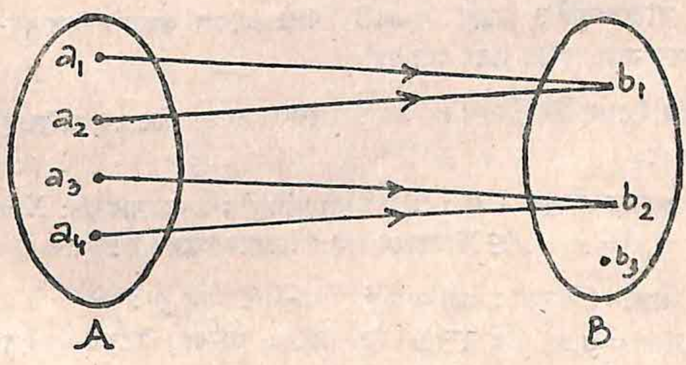
একৈক অন্তর্গত চিত্রণ

বহু-এক সর্বগত চিত্রণ (Many one onto mapping) ঃ যদি $f : A \rightarrow B$ হয় এবং $x_1,\ x_2\ \in A$ হয়। এখন $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_1)$ এবং $f(A) = B$ হলে এই চিত্রণকে বহু-এক সর্বগত চিত্রণ বলা হবে।



বহু এক সর্বগত চিত্রণ

বহু-এক অন্তর্গত চিত্রণ (Many-one into mapping) যদি $f : A \rightarrow B$ হয় এবং $x_1, x_2\ \in A$ হয়। এখন $x_1\ \neq\ x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_1)$ এবং $f(A) \subset B$ হলে এই চিত্রণটিকে বহু-এক অন্তর্গত চিত্রণ বলা হবে।



বহু-এক অন্তর্গত চিত্রণ

ব্যস্ত চিত্রণ (Inverse mapping) : যদি 'f' নিয়মানুসারে X'এর সঙ্গে Y'এর ঐকৈক প্রতিষঙ্গ হয় তাহলে 'g' নিয়মানুসারে Y'এর প্রত্যেকটি সদস্যের চিত্র X'এর একটি পৃথক সদস্য। g নিয়মটিকে বলা হয় f'এর ব্যস্ত চিত্রণ। $g=f^{-1}$ এই সংকেত দিয়ে এটিকে নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ যদি $y=f(x)$, Y'এর সর্বগত ঐকৈক চিত্রণ হয়, তাহলে $x=f^{-1}(y)$, X'এর সর্বগত ঐকৈক চিত্রণ।

ঐকৈক প্রতিষঙ্গ (one-one correspondence) : যদি $f: A \to B$ চিত্রণটি ঐকৈক এবং সর্বগত হয় অর্থাৎ যদি A'এর প্রত্যেকটি সদস্যের f চিত্র B-এর একটি পৃথক সদস্য হয় এবং যদি B-এর এরূপ সদস্য না থাকে যা A-এর কোন সদস্যের চিত্র নয়, তাহলে স্পষ্টতঃই A এবং B সংহতিদ্বয়ের সদস্য সংখ্যা সমান। এক্ষেত্রে বলা হয় যে A এবং B তুল্যপদী (Numerically equivalent) এবং f নিয়মানুসারে A-এর সঙ্গে B-এর ঐকৈক প্রতিষঙ্গ হয়।

উন্মুক্ত আবরণ (open cover) : ধরা যাক C_i একটি বাস্তবরেখার উন্মুক্ত অন্তর এবং $G=\{C_i\}$ উন্মুক্ত অন্তরের পরিবার। যদি রুদ্ধ অন্তর $[a, b]$'এর প্রত্যেকটি বিন্দু G পরিবারের অন্তর্গত কোন একটি উন্মুক্ত অন্তরের বিন্দু হয় তাহলে বলা হয় যে G পরিবার $[a, b]$ রুদ্ধ অন্তরের একটি উন্মুক্ত আবরণ।

ইনজেক্‌টিভ চিত্রণ (Injective mapping) : একটি সর্বগত ঐকৈক চিত্রণ অথবা অন্তর্গত ঐকৈক চিত্রণকে ইনজেক্‌টিভ চিত্রণ বলা হয়।

সারজেক্‌টিভ চিত্রণ : একটি সর্বগত ঐকৈক অথবা সর্বগত বহু-এক চিত্রণকে সারজেক্‌টিভ চিত্রণ বলা হয়।

বাইজেক্‌টিভ চিত্রণ : একটি ঐকৈক সর্বগত চিত্রণকে বাইজেক্‌টিভ চিত্রণ বলে।

অভেদ চিত্রণ (Identity mapping) : ধরা যাক $f: X \to X$ এবং $f(x)=x \ \forall x \in X$ তাহলে এই f চিত্রণকে অভেদ চিত্রণ বলে।

চিত্রণের সমতা : ধরা যাক $f: S \to T$ এবং $g: S \to T$ এখন যদি $f(x)=g(x) \ \forall x \in S$ হয় তাহলে আমরা f চিত্রণটি g চিত্রণের সমান এবং $f=g$ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে লিখবো।

অব-চিত্রণ (Inclusion mapping) : ধরা যাক T একটি সংহতি এবং S-সংহতিটি T-সংহতিটির সহ-সংহতি। এখন যদি $f : S \to T$ এবং সংজ্ঞায়িত করা হয় $f(x)=x \ \forall \ x \in S$, তাহলে এই চিত্রণকে অব-চিত্রণ বলা হবে।

তত্ত্ব 1. যদি $f : A \to B$ এঁকৈক সর্বগত চিত্রণ হয় তাহলে $f^{-1} : B \to A$ এঁকৈক সর্বগত চিত্রণ হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক $x_1, x_2 \in A$ এবং $y_1, y_2 \in B$ এবং $f(x_1) = y_1, f(x_1)=y_2$.

যদি f^{-1} চিত্রণটি f চিত্রণের ব্যস্ত চিত্রণ হয় তাহলে $f^{-1}(y_1)=x_1$ এবং $f^{-1}(y_2)=x_2$.

এখন $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ [যেহেতু f চিত্রণটি এঁকৈক]

$\Rightarrow y_1=y_2$

অতএব f^{-1} এঁকৈক চিত্রণ,

f^{-1} সর্বগত চিত্রণ এটি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

অতএব f^{-1} এঁকৈক সর্বগত চিত্রণ।

চিত্রণসমূহের গুণন অথবা যৌগ (Product or Composite of mappings)

ধরা যাক $f : S_1 \to S_2$ এবং $g : S_2 \to S_3$ দুটি চিত্রণ।

এবং (i) $f(x)=y$ এখানে $x \in S_1, y \in S_2$

(ii) $g(y)=z$ এখানে $z \in S_3$.

এখন যদি আমরা নূতন একটি চিত্রণ $h : S_1 \to S_3$ এরূপভাবে নিই যার ফলে $h(x)=z=g(y)=gf(x) \ \forall \ x \in S_1$

এখন এই চিত্রণ h-কে f এবং g এর চিত্রণসমূহের গুণন বা যৌগ বলা হয় এবং gf এই প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

তত্ত্ব 2. চিত্রণসমূহের গুণন সংযোগবিধি মেনে চলে।

ধরা যাক $f : A \to B, g : B \to C$ এবং $h : C \to D$; আমাদের প্রমাণ করতে হবে $h(gf)=(hg)f$.

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x \in A$ তাহলে $\{h(gf)\}(x) = h\{(gf)(x)\}$

$$= h\{g[f(x)]\}$$

$$= h\{g(y)\} \quad \text{যদি } f(x) = y \text{ হয়}$$

$$= h(z) \quad \text{যদি } g(y) = z \text{ হয়}$$

$$= t \text{ ধরা যাক}$$

আবার $\{(hg)\ f\}\ (x) = (hg)\{f(x)\}$

$$= (hg)y$$

$$= h\{g(y)\}$$

$$= h(z)$$

$$= t$$

অতএব চিত্রণসমূহের সমতার সংজ্ঞা থেকে আমরা বলতে পারি $h(gf) = (hg)f$.

তত্ত্ব 3. যদি $f : A \rightarrow B$ এবং $g : B \rightarrow C$ দুটি একৈক সর্বগত চিত্রণ হয় তাহলে gf চিত্রণটির ব্যস্ত চিত্রণ পাওয়া যাবে এবং

$$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$$

প্রমাণ ঃ $f : A \rightarrow B$ এবং $g : B \rightarrow C$ দুটি ব্যস্ত চিত্রণ আমরা প্রমাণ করবো

(ক) gf ব্যস্ত চিত্রণ

(খ) $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

(ক) এটি প্রমাণ করতে গেলে আমরা দেখাবো gf একৈক এবং সর্বগত-

ধরা যাক $x_1, x_2 \in A$.

এখন $(gf)(x_1) = (gf)(x_2)$

$$\Rightarrow g(f(x_1)) = (gf(x_2)).$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad [\ g \text{ একৈক}]$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad [f \text{ একৈক}\ ]$$

অতএব $(gf)(x_1)=(gf)(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$,

সুতরাং আমরা দেখতে পেলাম gf একৈক চিত্রণ।

ধরা যাক $z \in C$ যেহেতু g একৈক সর্বগত চিত্রণ ;

অতএব আমরা একটিমাত্র সদস্য $y \in B$ পাবো যার ফলে $g(y)=z$ হবে। আবার f একৈক সর্বগত চিত্রণ ;

অতএব আমরা একটিমাত্র সদস্য $x \in A$ পাবো যার ফলে $f(x)=y$ হবে।

$$\therefore \quad (gf)\, x = g(f(x)(= g(y) = z.$$

সুতরাং আমরা বলতে পারি যে-কোন $z \in C$ হলে আমরা একটি অনন্য সদস্য $x \in A$ নির্ণয় করতে সক্ষম যার ফলে $(gf)x=z$.

অর্থাৎ gf সর্বগত চিত্রণ।

এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায় gf একৈক সর্বগত চিত্রণ। অর্থাৎ $(gf)^{-1}$ চিত্রণটির অস্তিত্ব আছে।

(খ) $(gf)^{-1} : C \to A$ এবং

$(gf)^{-1}z = x$ এখানে $f(x)=y$ এবং $g(y)=z$

যেহেতু $f : A \to B \Rightarrow f^{-1} : B \to A.$

$g : B \to C \Rightarrow g^{-1} : C \to B.$

$\therefore \quad f^{-1}g^{-1} : C \Rightarrow X.$

এখন $(f^{-1}g^{-1})z = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-}(y) = x.$

অতএব $(gf)^{-1}z = f^{-1}g^{-1}z.$

যেহেতু $(gf)^{-1}$ এবং $f^{-1}g^{-1}$ এর একই ভূমি (domain), অতএব চিত্রণের সমতার সংজ্ঞা থেকে স্পষ্ট বলা যায় $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

তত্ত্ব 4. যদি $f : A \to B$ একটি একৈক সর্বগত চিত্রণ হয়, তাহলে

(ক) $f^{-1}f = I_A$ [A-স্থিত অভেদ চিত্রণ]

(খ) $f\,f^{-1} = I_B$ [B-স্থিত অভেদ চিত্রণ]

প্রমাণঃ (ক) যেহেতু $f : A \to B$ একৈক সর্বগত চিত্রণ ;
অতএব একটি f^{-1} চিত্রণটির অস্তিত্ব আছে।
ধরা যাক $x \in A$ এবং $y \in B$ যার ফলে

$$y=f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

যেহেতু $f : A \to B$ এবং $f^{-1} : B \to A$.
অতএব $f^{-1}f : A \to A$.

f চিত্রণটি একৈক সর্বগত $\Rightarrow f^{-1}$ চিত্রণটি একৈক সর্বগত $\Rightarrow f^{-1}f$ চিত্রণটি একৈক সর্বগত।

আবার $(f^{-1}f)x = f^{-1}(f(x)$.

$$= f^{-1}(y)$$

$$= x$$

অতএব $f^{-1}f$ চিত্রণটি A-স্থিত অভেদ চিত্রণ।

অর্থাৎ $f^{-1}f = I_A$.

(খ) ঠিক অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়

$$ff^{-1} = I_B.$$

তত্ত্ব 5. প্রমাণ করুন $f : A \to B$ চিত্রণটি একৈক সর্বগত চিত্রণ হলে আমরা $g : B \to A$ একটি চিত্রণ পাবো যার ফলে gf এবং fg দুটি অভেদ চিত্রণ।

প্রমাণঃ এখানে $g = gI_B = g(ff^{-1})$

$$= (gf)f^{-1}$$

$$= I_A f^{-1}$$

$$= f^{-1}$$

অথবা $g = I_A g = (f^{-1}f)\, g$

$$= f^{-1}(fg)$$

$$= f^{-1}I_B$$

$$= f^{-1}.$$

অতএব তত্ত্বটি প্রমাণিত হোলো।

তত্ত্ব 6. যদি f A $\to$ B এবং $S \subset B$ তাহলে $f\{f^{-1}(S)\} \subseteq S$.
তাছাড়াও যদি f সর্বগত চিত্রণ হয় তাহলে
$f\{f^{-1}(S)\} = S$ হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $a \in f\{f^{-1}(S)\}$

$\Rightarrow a = f(x)$ { কোন $x \in f^{-1}(S)$}

$\Rightarrow a = f(x)$ এবং $f(x) \in S$.

$\Rightarrow a \in S$

অতএব $f\{f^{-1}(S)\} \subseteq S$.

এখন f চিত্রণটি যদি সর্বগত হয় তাহলে প্রতিটি $a \in S$ হলে আমরা একটি সদস্য x পাব, যার ফলে $x \in f^{-1}(S) \Rightarrow a = f(x)$.

অতএব $a \in f\{f^{-1}(S)\}$

$\therefore \quad S \subseteq f\{f^{-1}(S)\}$

অতএব $f\{f^{-1}(s)\} = S$.

তত্ত্ব 7. যদি $f : A \to B$ এবং $S \subset A$ হয়, তাহলে $S \subseteq f^{-1}\{f(S)\}$
তাছাড়াও যদি f সর্বগত চিত্রণ হয় তাহলে $f^{-1}\{f(s)\} = S$ হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $a \in S$, তাহলে $f(a) \in f(S)$.

$\therefore \quad a \in f^{-1}\{f(S)\}$

অতএব $S \subseteq f^{-1}\{f(S)\cdots\cdots\cdots$(i)

যদি f চিত্রণটি একৈক সর্বগত চিত্রণ হয় তাহলে

$a \in f^{-1}\{f(S)\}$

$\Rightarrow f(a) \in f(S)$

$\Rightarrow f(a) = f(x)$ [কোন $x \in S$]

$\Rightarrow a = x$ { যেহেতু f একৈক }

$\Rightarrow a \in S$.

অতএব $f^{-1}\{f(S)\} \subseteq S.$ .... (ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে স্পষ্টই বলা যায়

$$f^{-1}\{f(S)\} = S.$$

তত্ত্ব 8. প্রমাণ করুন $f^{-1}(A-B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x \in f^{-1}(A-B)$

$\Rightarrow f(x) \in A-B$

$\Rightarrow f(x) \in A$ কিন্তু $f(x) \notin B$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ কিন্তু $x \notin f^{-1}(B)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

অতএব $f^{-1}(A-B) \subseteq f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$.........(i)

আবার ধরা যাক $y \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

$\Rightarrow y \in f^{-1}(A)$ কিন্তু $y \notin f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f(y) \in A$ কিন্তু $f(y) \notin B$

$\Rightarrow f(y) \in A-B$

$\Rightarrow y \in f^{-1}(A-B)$

অতএব $f^{-1}(A) - f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A-B)$......(ii)

(i) এবং (ii) থেকে স্পষ্টই বলতে পারি

$$f^{-1}(A-B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B).$$

তত্ত্ব 9. প্রমাণ করুন $f^{-1}(B') = \{f^{-1}(B)\}'$

এখানে B' হচ্ছে B-সংহতিটির পূরক সংহতি।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x \in f^{-1}(B')$, তাহলে

$x \in f^{-1}(B') \Rightarrow f(x) \in B'$

$\Rightarrow f(x) \notin B$

$\Rightarrow x \notin f^{-1}(B)$

$\Rightarrow x \in \{f^{-1}(B)\}'$

অতএব $f^{-1}(B') \subseteq \{f^{-1}(B)'\cdots\cdots$ (i)

আবার $y \in \{f^{-1}(B)\}' \Rightarrow y \notin f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f(y) \notin B$

$\Rightarrow f(y) \in B'$

$\Rightarrow y \in f^{-1}(B')$

অতএব $\{f^{-1}(B)\}' \subseteq f^{-1}(B')\cdots\cdots$ (ii)

(i) এবং (ii) থেকে বলা যায় $\{f^{-1}(B')\} = \{f^{-1}(B)\}'$.

তত্ত্ব 10. যদি $f : X \rightarrow Y$ এবং $A, B \subset X$ তাহলে প্রমাণ করুন

(ক) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(খ) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

প্রমাণ : (ক) ধরা যাক $y \in f(A \cup B) \Rightarrow y = f(x)$ কোন $x \in A \cup B$

অর্থাৎ $y = f(x)$ কোন $x \in A$ বা কোন $x \in B$ এর জন্য

এখন $x \in A \Rightarrow y \in f(A)$

$x \in B \Rightarrow y \in f(B)$

অতএব $y \in (fA) \cup (fB) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

অর্থাৎ $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ $\cdots$ (i)

আবার যদি $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow$ হয় $y \in f(A)$ না হয় $y \in f(B)$

যদি $y \in f(A) \Rightarrow \exists\, x \in A$ যার ফলে $y = f(x)$

$\therefore\ y \in f(A \cup B)$.

যদি $y \in f(B) \Rightarrow \exists\, x \in B$ যার ফলে $x = f(x)$

$\therefore\ y \in f(A \cup B)$.

অতএব $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A \cup B)$

$\therefore\ f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ $\cdots\cdots$ (ii)

(i) এবং (ii) থেকে আমরা বলতে পারি

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(খ) ধরা যাক $y \in f(A \cap B)$ তাহলে

$y = f(x)$ কোন $x \in A \cap B$ 'এর জন্য

যেহেতু $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

এবং $x \in B \Rightarrow f(x) \in f(B)$.

অতএব $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow f(x) \in f(A)$ এবং $f(x) \in f(B)$

$\Rightarrow f(x) \in f(A) \cap f(B)$

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

মনে রাখা প্রয়োজন সাধারণীকৃতভাবে বলা যায়

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায়

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

তত্ত্ব 11. যদি $f : X \to Y$ এবং $A, B \subset Y$ তাহলে প্রমাণ করুন

(ক) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(খ) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

প্রমাণ ঃ (ক) যদি $x \in f^{-1}(A \cup B)$ তাহলে $f(x) \in A \cup B$.

আবার $f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$

এবং $f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$

এখন $x \in f^{-1}(A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B$

$\Rightarrow f(x) \in A$ বা $f(x) \in B$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$\therefore \; f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \cdots\cdots$(i)

আবার $y \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$\Rightarrow y \in f^{-1}(A)$ বা $y \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f(y) \in A$ বা $f(y) \in B$

$$\Rightarrow f(y) \in A \cup B.$$

$\therefore \quad f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B) \cdots\cdots$(ii)

(i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

(খ) ধরা যাক $x \in f^{-1}(A \cap B) \Rightarrow f(x) \in A \cap B$

$\Rightarrow f(x) \in A$ এবং $f(x) \in B$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ এবং $x \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$\therefore \quad f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \cdots\cdots$(i)

আবার $y \in f^{-1}(A) \cap f^{-}(B)$

$\Rightarrow y \in f^{-1}(A)$ এবং $y \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f(y) \in A$ এবং $f(y) \in B$

$\Rightarrow f(y) \in A \cap B$

$\Rightarrow y \in f^{-1}(A \cap B)$

$\therefore \quad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B) \cdots\cdots$(ii)

(i) এবং (ii) থেকে বলা যায়

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

7·12. আন্তর্পরিণামী সংহতি (Inner limiting set) : যদি কোন মৌল অন্তরস্থ বিন্দুসমূহের দ্বারা $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n, \cdots\cdots$, সংহতিসমূহের অনুক্রম (sequence) গঠন করা হয় এবং $S_{n+1} \subset S_n$ হয়, তাহলে এই সংহতি-সমূহের ছেদের ফলে উৎপন্ন সংহতিটিকে আন্তর্পরিণামী সংহতি বলা হয় অর্থাৎ

$$S = \bigcap_{n=1} S_n \text{ এখানে } S_{n+1} \subset S_n$$

7·13. বহির্পরিণামী সংহতি (Outer limiting set) : যদি কোন মৌল অন্তরস্থ বিন্দুসমূহের দ্বারা $\{S_n\}$ একটি ঊর্ধ্বগ সংহতিসমূহের অনুক্রম গঠন

করা হয়, তাহলে এই সংহতিসমূহের সমন্বয়ের ফলে উৎপন্ন সংহতিটিকে বহির্পরিণামী সংহতি বলা হবে।

প্রথম প্রজাতির সংহতি (Set of the first category) : যদি কোন মৌল অন্তরস্থ বিন্দুসমূহের দ্বারা $\{S_n\}$ একটি ঊর্ধ্বগ সংহতিসমূহের অনুক্রম গঠন করা হয় এবং এই অনুক্রমের প্রত্যেকটি সদস্যই অঘন (non dense) হয়, তাহলে এই সংহতিসমূহের সমন্বয়ে উৎপন্ন সংহতিকে প্রথম প্রজাতির সংহতি বলা হবে।

দ্বিতীয় প্রজাতির সংহতি (Set of the second category) : যে সংহতিটি প্রথম প্রজাতির হবে না সেই সংহতিটিকে দ্বিতীয় প্রজাতির সংহতি বলা হবে।

অবশিষ্ট সংহতি (Residual set) : প্রথম প্রজাতির সংহতির অনুপূরক দ্বিতীয় প্রজাতির সংহতিকে অবশিষ্ট সংহতি বলা হবে।

তত্ত্ব 1. প্রমাণ করুন উৎকৃষ্ট সংহতি সর্বদাই উদ্ভূত সংহতির সঙ্গে অভিন্ন। (Prove that a perfect set is identical with its derivative).

প্রমাণ : ধরা যাক E একটি উৎকৃষ্ট সংহতি। তাহলে E-এর সমস্ত সদস্যই পরিণাম বিন্দু এবং এগুলি E'এর মধ্যে অবস্থান করে। স্বাভাবিকভাবে বলা যায় E 'এর উদ্ভূত সংহতিতে E'র সব সদস্যই থাকছে। অর্থাৎ উৎকৃষ্ট সংহতি সর্বদাই উদ্ভূত সংহতির সঙ্গে অভিন্ন।

তত্ত্ব 2. প্রমাণ করুন প্রত্যেকটি উদ্ভূত সংহতিই রুদ্ধ।
(Prove that every derived set is closed).

প্রমাণ : ধরা যাক E একটি সংহতি এবং E' হচ্ছে E সংহতিটির উদ্ভূত সংহতি। আমাদের প্রমাণ করতে হবে E' রুদ্ধ। ধরা যাক α বিন্দুটি E' সংহতিটির পরিণাম বিন্দু। তাহলে α'কে ঘিরে যদি কোন প্রতিবেশী অঞ্চল গঠন করা যায় তাহলে সেই প্রতিবেশী অঞ্চলে E' এর সদস্যই থাকবে। এবং এগুলি E বিন্দুর পরিণাম বিন্দু। সুতরাং আমরা বলতে পারি α 'কে ঘিরে যে প্রতিবেশী অঞ্চল গঠন করা হয়েছে তাতে E'-এর সদস্যই থাকছে। অর্থাৎ α বিন্দুটি E সংহতিটির পরিণাম বিন্দু এবং α নিশ্চয়ই E' সংহতিটিতে থাকছে। অর্থাৎ E' রুদ্ধ সংহতি।

তত্ত্ব 3. যদি কোন সংহতি স্বঘন (dense in itself) হয় তাহলে এই সংহতিটির উদ্ভূত সংহতি উৎকৃষ্ট হবে (If a set is dense in itself then it's derivative set is perfect).

প্রমাণ ঃ ধরা যাক E একটি স্বঘন সংহতি এবং E′ এটির উদ্ভূত সংহতি। তাহলে স্বভাবতই E′ রুদ্ধ। আমরা এখন প্রমাণ করবো E′ স্বঘন। ধরা যাক E সংহতিটির একটি সদস্য α। তাহলে α 'কে ঘিরে যে প্রতিবেশী অঞ্চল গঠন করা হোলো তাতে E সংহতিটির অসীম সংখ্যক সদস্য অবস্থান করবে এবং এগুলি E′ এর সদস্য। যেহেতু E সংহতিটি স্বঘন। সুতরাং, E′ 'র প্রতিটি সদস্যই E'র পরিণাম বিন্দু। অতএব E′ স্বঘন। অর্থাৎ E′ সংহতিটি উৎকৃষ্ট সংহতি।

তত্ত্ব 4. যদি কোন সংহতির উদ্ভূত সংহতি গণনানুক্রমী হয় তাহলে মূল সংহতিটিও গণনানুক্রমী হবে। (If the first derived set is enumerable, then the original is also enumerable)

প্রমাণ ঃ ধরা যাক E একটি সংহতি। এখন E থেকে সমস্ত পরিণাম বিন্দুগুলি সরিয়ে রাখা হোলো। তাহলে বাকী সদস্যগুলি নিয়ে যে সংহতিটি গঠিত হোলো সেটি বিচ্ছিন্ন সংহতি (Isolated set)। ধরা যাক এই সংহতিটি K এবং এটি গণনানুক্রমী। E 'এর পরিণাম বিন্দুগুলি নিয়ে E′ সংহতিটি গঠন করা হোলো। এই পরিণাম বিন্দুগুলি E'তে থাকতেও পারে আবার নাও থাকতে পারে। E 'এর পরিণাম বিন্দুগুলি যারা E 'তেই আছে তাদের নিয়ে একটি সহ-সংহতি G গঠন করা হোলো অর্থাৎ $G \subset E$। যেহেতু E′ গণনানুক্রমী অতএব G গণনানুক্রমী। সুতরাং দেখা যাচ্ছে E সংহতিটি দুটি গণনানুক্রমী সংহতির সাহায্যে গঠিত এবং আমরা সহজেই বলতে পারি E নিশ্চয়ই গণনানুক্রমী।

তত্ত্ব 5. প্রতিটি গণনানুক্রমী সংহতিই প্রথম প্রজাতির সংহতি। (Every enumerable set is a set of the first category.)

প্রমাণ ঃ কোন মৌল অন্তরস্থ বিন্দু দ্বারা G একটি গণনানুক্রমী সংহতি গঠন করা হোলো। আমাদের প্রমাণ করতে হবে G একটি প্রথম প্রজাতির সংহতি। G এর সদস্যবৃন্দকে $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ এই নিয়মে লেখা হোলো। ধরা যাক $P_1 = \{a_1\}$, $P_2 = \{a_1, a_2\}$, $P_3 = \{a_1, a_2, a_3\}, \cdots\cdots$,

$P_n = \{a_1, a_2, \cdots\cdots a_n\}$। আমরা লক্ষ্য করে দেখতে পাচ্ছি P_n সংহতিটি একটি মৌল অন্তরের মধ্যে অঘন এবং $P_n \subset P_{n+1}$ $\forall n$. তাছাড়াও দেখা যাচ্ছে $G = \bigcup_{n=1} P_n$। অতএব সংজ্ঞানুযায়ী বলা যায় G প্রথম প্রজাতির সংহতি।

তত্ত্ব 6. কোন অন্তর দুটি প্রথম প্রজাতির সংহতি দ্বারা গঠিত হতে পারে না (Any interval can not be made up by the two sets of the first category)

প্রমাণ ঃ ধরা যাক G একটি প্রথম প্রজাতির সংহতি এবং (α, β) অন্তরে অবস্থিত। যেহেতু G একটি প্রথম প্রজাতির সংহতি ধরা হয়েছে অতএব আমরা একটি অঘন সংহতিসমূহের অনুক্রম $\{G_n\}$ পাব, যার ফলে $G = \bigcup_{n=1} G_n$ এবং $G_n \subset G_{n+1}$ হবে। G সংহতিটির অনুপূরক সংহতি অর্থাৎ C(G) সংহতিটি ঐ প্রাথমিক অন্তরে ঘনীভূত।

এখন (α, β) অন্তরের মধ্যে অবস্থিত এমন একটি অন্তর (α_1, β_1) পাব যার মধ্যে G_1 সংহতিটির কোন সদস্য থাকবে না। ঠিক একইভাবে (α_1, β_1) অন্তরের মধ্যে অবস্থিত এমন একটি অন্তর (α_2, β_2) পাব যার মধ্যে G_2 সংহতির কোন সদস্যই থাকবে না। ঠিক অনুরূপ পদ্ধতি অনুসরণ করার পর আমরা $(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_2, \beta_2), \cdots\cdots, (\alpha_n, \beta_n), \cdots\cdots$ কতকগুলি অন্তরের অনুক্রম পাব যার মধ্যে একটি সদস্য অবস্থান করবে কিন্তু G 'এর সদস্য হবে না। সুতরাং C(G) সংহতিটির সদস্য হবে। এ থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি G সংহতিটি কোন অন্তরের সদস্য দ্বারা গঠিত নয়। এবার আমরা প্রমাণ করবো C(G) সংহতিটি প্রথম প্রজাতির নয়। ধরা যাক C (G) একটি প্রথম প্রজাতির সংহতি তাহলে আমরা দ্বিতীয় একটি অঘন সংহতি সমূহের অনুক্রম $\{G_n'\}$ পাব, যার ফলে $C(G) = \bigcup_{n=1} G_n'$ এবং $G_n' \subset G'_{n+1}$ হবে।

আমরা দেখতে পাচ্ছি $G_1'' = G_1 + G_1'$, $G_2'' = G_2 + G_2', \cdots\cdots$ $\cdots\cdots$, $G_n'' = G_n + G_n'$ এবং এগুলির প্রত্যেকটি অঘন, তাছাড়াও $G_n \subset G_{n+1}$ অতএব $\bigcup G_n''$ একটি প্রথম প্রজাতির সংহতি এবং এটি প্রাথমিক অন্তরের সঙ্গে অভিন্ন। কিন্তু এটি একেবারেই অসম্ভব। যেহেতু C(G) প্রথম প্রজাতির সংহতি ধরা হয়েছে, সেই হেতুই আমরা এই অসম্ভব

সম্পর্কটির সাক্ষাৎ পাচ্ছি। সুতরাং $C(G)$ প্রথম প্রজাতির সংহতি নয়। এতক্ষণ পর্যন্ত যে আলোচনা আমরা করলাম তা থেকে বলা যায় যে কোন অন্তর দুটি প্রথম প্রজাতির সংহতির দ্বারা গঠিত হতে পারে না।

তত্ত্ব 7. যদি $\{G_n\}$ অবশিষ্ট সংহতিসমূহের একটি অনুক্রম হয় তাহলে $G = \cap G_{n+1}$ একটি অবশিষ্ট সংহতি।

প্রমাণঃ যেহেতু G_n একটি অবশিষ্ট সংহতি অতএব সংজ্ঞানুযায়ী $C(G_n)$ প্রথম প্রজাতির সংহতি। সুতরাং আমরা একটি অঘন সংহতির অনুক্রম $\{G_m^n\}$ পাব, যার ফলে $C(G_n) = \bigcup_{m=1} G_m^n$ এবং $G_m^n \subset G_{m+1}^n$ হবে।

সুতরাং $C(G_1) \cup C(G_2) \cup \cdots\cdots$ সঙ্গে $G_1^1 \cup G_2^1 \cup G_3^1 \cup \cdots$ সমন্বয়টি সমান এবং যেহেতু প্রত্যেকটি সংহতিই অঘন অতএব এদের সমন্বয় অর্থাৎ $C(G_1) \cup C(G_2) \cup \cdots\cdots \cup C(G_n) \cdots\cdots$ প্রথম প্রজাতির সংহতি। এবং এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা বলতে পারি $G = C(C(G))$ অবশিষ্ট সংহতি।

সাধারণ আন্তর্পরিণামী সংহতিঃ (Ordinary inner limiting set)ঃ যদি $\{S_n\}$ একটি উন্মুক্ত সংহতির অনুক্রম হয় এবং $S_{n+1} \subset S_n$ হয়, তাহলে $G = \bigcap_{n=1} S_n$ 'কে সাধারণ আন্তর্পারিণামী সংহতি বলা হয়।

সাধারণ বহির্পরিণামী সংহতি (Ordinary outer limiting set)ঃ $\{S_n\}$ একটি রুদ্ধ সংহতির অনুক্রম হয় এবং $S_n \subset S_{n+1}$ হয় তাহলে $G = \bigcup_{n=1} S_n$ 'কে সাধারণ বহির্পারিণামী সংহতি বলা হয়।

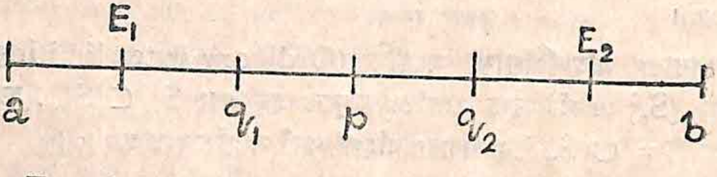
তত্ত্ব 8. কোন সাধারণ আন্তর্পারিণামী সংহতির অনুপূরক সাধারণ বহির্পারিণামী সংহতি হবে।

প্রমাণঃ ধরা যাক $\{G_n\}$ একটি উন্মুক্ত সংহতির অনুক্রম এবং (ক) $G_{n+1} \subset G_n$, (খ) $A = \bigcap_{n=1} G_n$ এখন যেহেতু G_n উন্মুক্ত $\Rightarrow C(G_n)$ রুদ্ধ। আবার $G_{n+1} \subset G_n \Rightarrow C(G_{n+1}) \supset C(G_n)$ সুতরাং $C(A) = \cup(CG_n)$ অর্থাৎ $C(A)$ সংহতিটি সাধারণ বহির্পারিণামী সংহতি।

প্রসঙ্গত বলা প্রয়োজন সমস্ত উন্মুক্ত সংহতি $[a, b]$ অন্তরের মধ্যে ঘনীভূত বলে রুদ্ধ সংহতি $C(G_n)$ অঘন হবে এবং সেক্ষেত্রে $C(A) = \cup C(G_n)$ প্রথম প্রজাতির সংহতি হবে। এক্ষেত্রে A অবশিষ্ট সংহতি হবে।

তত্ত্ব 9. একটি অঘন উৎকৃষ্ট সংহতি গঠন (Structure of a non-dense perfect set).

ধরা যাক $[a, b]$ রুদ্ধ অন্তরের মধ্যে E একটি অঘন উৎকৃষ্ট সংহতি। তাহলে আমরা এমন একটি বিন্দু p পেতে পারি যেটি E সংহতির মধ্যে অবস্থান করে না। p বিন্দুটি E সংহতিটিকে এমন দুটি সহ-সংহতি E_1 এবং E_2 'তে ভাগ করে যার ফলে একটি সংহতি p বিন্দুর দক্ষিণপার্শ্বে এবং অপরটি বামপার্শ্বে অবস্থান করে। যেহেতু E অঘন উৎকৃষ্ট সংহতি, অতএব E_1 এবং E_2 সংহতিদ্বয়ও অঘন উৎকৃষ্ট সংহতি হবে। ধরা যাক E_2 সংহতির সর্বনিম্ন প্রান্তীয়মান q_2 এবং এটি p 'র দক্ষিণপার্শ্বে অবস্থান করে। যেহেতু E উৎকৃষ্ট অতএব $q_2 \in E$। আবার আমরা দেখতে পাই E_2 সংহতির কোন বিন্দুই q_2 'এর বামপার্শ্বে অবস্থান করে না। অর্থাৎ q_2 বিন্দুর বামপার্শ্বে E সংহতির কোন বিন্দু অবস্থান করে না। অনুরূপভাবে ধরা যাক E_1 সংহতির সর্বোচ্চ প্রান্তীয়মান q_1 এবং এটি p বিন্দুর বামপার্শ্বে অবস্থান করে। এবং যেহেতু E সংহতিটি উৎকৃষ্ট অতএব $q_1 \in E$।



এখন E_1 সংহতিটির কোন বিন্দুই q_1 'এর দক্ষিণপার্শ্বে অবস্থান করবে না অর্থাৎ E 'এর কোন বিন্দুই q_1 'এর দক্ষিণপার্শ্বে অবস্থান করে না। তাহলে আমরা দেখতে পেলাম (q_1, q_2) উন্মুক্ত অন্তরের মধ্যে E সংহতির কোন বিন্দুই (সদস্যই) থাকছে না। এই পদ্ধতিতে দ্বিতীয় একটি বিন্দু p_1 নিই যেটি E এর মধ্যে অবস্থান করবে না। তাহলে এই p_1 এর অনুবর্তী একটি প্রত্যাসন্ন অন্তর পেতে পারি। এই পদ্ধতি বিস্তৃত করলে $[a, b]$ অন্তরের মধ্যে সর্বত্রই এই ধরনের বিন্দু পেতে পারি যেগুলি E 'এর মধ্যে অবস্থান করে না এবং বিন্দুগুলির অনুবর্তী প্রত্যাসন্ন অন্তরসমূহের দেখা পাওয়া

যাচ্ছে। এইভাবে উপচে না পড়া উন্মুক্ত অন্তরের সাহায্যে গঠিত সর্বত্র ঘনীভূত সংহতির সাক্ষাৎ পাব। অবশ্য কোন সময়েই দুটি অন্তর লাগোয়া হবে না। তাহলে প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্তভাবে বলা যায় কোন সংহতি অঘন উৎকৃষ্ট হবে যদি একটি অনুপূরক, উপচে না পড়া উন্মুক্ত অন্তরের সাহায্যে গঠিত সর্বত্র ঘনীভূত হয় এবং যে কোন দুটি অন্তর লাগোয়া হবে না।

তত্ত্ব 10. হাইনে-বোরেল তত্ত্ব: যদি $[a, b]$ রুদ্ধ অন্তরের উন্মুক্ত আবরণ G একটি অসীম পরিবার হয়, তাহলে G 'এর একটি সীমিত উপ-পরিবার G_1 $[a, b]$ অন্তরের উন্মুক্ত আবরণ হবে।

প্রমাণ: ধরা যাক তত্ত্বটি সত্য নয় অর্থাৎ G 'এর কোন সীমিত উপ-পরিবার $[a, b]$ অন্তরের উন্মুক্ত আবরণ নয় তাহলে $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. এই দুটি উপ-অন্তরের অন্তত একটির এরূপ কোন উন্মুক্ত আবরণ নেই যা G 'এর সীমিত উপ-পরিবার। শেষোক্ত উপ-অন্তরকে আখ্যা দেওয়া যাক $[a_1, b_1]$; স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$, অনুরূপভাবে $\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ এই দুটি উপ-অন্তরের অন্তর। একটির এরূপ কোন আবরণ নেই যা G 'এর সীমিত উপ-পরিবার। এই উপ-অন্তরটিকে আখ্যা দেওয়া যাক $[a_2, b_2]$। স্পষ্টই $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b-a}{2^2}$; এইভাবে পাই একটি একান্বয়ে নিম্নগ রুদ্ধ অন্তরের ক্রম $[a_n, b_n]$ যার ব্যাস $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ এই ক্রমের কোন অন্তরের এরূপ কোন উন্মুক্ত আবরণ নাই যা G 'এর সীমিত উপ-পরিবার। ক্যান্টরের উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা বলতে পারি একটিমাত্র বিন্দু ξ এই ক্রমের সকল অন্তরের অন্তর্গত। এবং $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$, যেহেতু ξ, $[a, b]$ অন্তরের বিন্দু সেইহেতু এটি G পরিবারের অন্ততঃ একটি উন্মুক্ত অন্তরের অন্তর্গত।

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি তত্ত্বটি সত্য নয়, কল্পনা করে একটি

বিপরীত সিদ্ধান্তে পৌঁছাচ্ছি। অতএব আমাদের সিদ্ধান্তটি ভ্রান্ত। অর্থাৎ তত্ত্বটি সত্য।

তত্ত্ব 11. একটি গণনানুক্রমী সংহতি তার নিজস্ব সঠিক সহ-সংহতির সঙ্গে একৈক প্রতিষঙ্গ হতে পারে। (Any enumerable set can be put into one correspondence with a proper subset of itself).

প্রমাণঃ ধরা যাক A একটি গণনানুক্রমী। তাহলে A'র সমস্ত সদস্যগুলিকে $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ এইভাবে লেখা যায়।

ধরা যাক $B = A - \{a_1\}$, তাহলে B'কে স্বাভাবিক ভাবেই বলা যায় A'র সঠিক সংহতি। এখন $f : A \to B$ চিত্রণটি $f(a_1) = a_2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হোলো। স্বভাবতই এটি একৈক সর্বগত চিত্রণ।
অতএব তত্ত্বটি প্রমাণিত হোলো।

তত্ত্ব 12. প্রতিটি অসীম সংহতির মধ্যে গণনানুক্রমী সহ-সংহতি অবস্থান করে। (Every infinite set contains an enumerable subset).

প্রমাণঃ ধরা যাক A একটি অসীম সংহতি এবং P(A) সংহতিটি A সংহতির ঘাত সংহতি (power set)। তাহলে নির্বাচনের স্বতঃসিদ্ধ (axiom of choice) আমরা এখন একটি অপেক্ষক f পাব, যার ফলে A-স্থিত প্রত্যেকটি B সহ-সংহতির জন্য $f : P(A) \to A : f(B) \in B$ হবে। তাহলে 'f' এর সংজ্ঞানুসারে আমরা পাব

$\exists\, a_1 \in A$ যার ফলে $f(A) = a_1$

$\exists\, a_2 \in A - \{a_1\}$ যার ফলে $f(A - \{a_1\}) = a_2$ হয়।

$\exists\, a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$ যার ফলে $f(A - \{a_1, a_2\}) = a_3$ হয়।

এইভাগে আমরা অগ্রসর হলে এবং A অসীম সংহতি হওয়ার জন্য $A - \{a_1, a_2 \cdots\cdots a_n\}$ রিক্তহীন হবে $\forall n \in N$; যেহেতু f নির্বাচিত অপেক্ষক (choice function) অতএব আমরা পাই $a_n \neq a_m$ যখন $m < n$. অতএব a_n পৃথক। সুতরাং $\{a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots\}$ গণনানুক্রমী সহ সংহতি।

তত্ত্ব 13. কোন গণনানুক্রমী সংহতির সহ-সংহতি হয় সীমিত না হয়

গণনানুক্রমী অর্থাৎ সংখ্যেয় (A subset of an enumerable set is either finite or enumerable i. e. countable.)

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $A=\{a_1, a_2, ...; a_n, ...\}$ একটি গণনানুক্রমী সংহতি এবং $B \subset A$। এখন যদি $B=\phi$ হয় তাহলে B সীমিত। যদি $B \neq \phi$ হয় তাহলে ধরা যাক n_1 সর্বনিম্ন ধনাত্মক সংখ্যা যার ফলে $a_{n_1} \in B$ হয়। তারপর ধরা যাক n_2 সর্বনিম্ন ধনাত্মক সংখ্যা যদি n_1 থেকে বড় এবং যার ফলে $a_{n_2} \in B$ হয়। এইভাবে আমরা অগ্রসর হলে দেখতে পাব $B=\{a_{n_1}, a_{n_2}, ...\}$ হবে এবং স্বাভাবিক ভাবেই বলা চলে B সংখ্যেয়।

তত্ত্ব 14. গণনানুক্রমী সংহতিসমূহের গণনানুক্রমী সমাহারের সমন্বয় সর্বদাই গণনানুক্রমী (The union of enumerable collection of enumerable sets is enumerable).

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $G_1, G_2,$ ....গণনানুক্রমী সংহতিসমূহের গণনানুক্রমী সংকলন। এখন আমরা প্রমাণ করবো $\bigcup_{i \in N} G_i$ গণনানুক্রমী।

এখানে $N=$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সংহতি।

অর্থাৎ আমরা দেখবো এমন একটি চিত্রণ f পাওয়া যাবে, যার ফলে $f : \bigcup_{i \in N} G_i \rightarrow N.$

যেহেতু G_n গণনানুক্রমী অতএব প্রত্যেকটি G_n এর সদস্যগুলি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$
\begin{array}{llll}
G_1 = < a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots > \\
G_2 = < a_{21}, & a_{22} & a_{23}, & \cdots > \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
G_n = < a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots & >
\end{array}
$$

এখন $\bigcup_{n \in N} G_n$ 'এর সদস্যবৃন্দকে নিম্নরূপে সাজান হোলো।

$a_{11},$

$a_{21}, \; a_{12}$

$a_{31},\ a_{22},\ a_{13}$

$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots$

$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$

$a_{n1},\ a_{(n-1)2}, \cdots \qquad \cdots a_{1n}.$

এখন এই প্রণালীর মধ্যে a_{ij} পুনঃপুনঃ দেখতে পাওয়া যায় তাহলে একবারই a_{ij} 'কে ধরা হবে বাকী সমস্তবার একে বাদ দিতে হবে। আমাদের সাজানো পদ্ধতি থেকে বলতে পারা যায়, $(p+q-1)$-তম সারির q-তম সদস্য হচ্ছে a_{pq}, তাহলে $\bigcup_{i\in N} G_i$ 'এর সদস্যগুলি অসীম অনুক্রমে সাজানো যায় অর্থাৎ

$$\bigcup_{i\in N} G_i=\{a_{11},\ a_{21},\ a_{12}, \cdots\cdots\}$$

স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে আমরা একটি চিত্রণ f পাচ্ছি যার ফলে $f:\ \bigcup_{i\in N} G_i \to N$ এবং এটিকে সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$f(a_{pq})=\frac{(p+q-2)(p+q-1)}{2}+q$$

এ থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে $\bigcup_{i\in N} G_i$ একটি গণনানুক্রমী সংহতি।

তত্ত্ব 15. যদি A এবং B উভয়েই গণনানুক্রমী হয় তাহলে $A\times B$ সংহতিটিও গণনানুক্রমী হবে।

প্রমাণ : যেহেতু A এবং B গণনানুক্রমী অতএব A এবং B 'কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$A=\{a_1,\ a_2, \cdots\cdots\}$$
$$B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots\}$$

এখন $A\times B$-স্থিত সদস্যগুলি এইভাবে সাজানো হোলো

$(a_1,\ b_1),$

$(a_2,\ b_1),\ (a_1,\ b_2)$

$$(a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$(a_n, b_1), (a_{n-1}, b_2), \cdots\cdots, (a_1, b_n).$$

$$\cdots \quad \cdots\cdot \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

এই পদ্ধতিতে সাজানোর ফলে আমরা বলতে পারি $(p+q-1)$-তম সারির q-তম সদস্য হচ্ছে (a_p, a_q), সুতরাং $A \times B$-স্থিত সদস্যসমূহের একটি অনুক্রমের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), \cdots\cdots\}$$

এ থেকে স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে আমরা এমন একটি চিত্রণ f পাব যার ফলে $f : A \times B \to N$.

এবং এটিকে সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$f(a_p, b_q) = \frac{(p+q-2)(p+q-1)}{2} + q$$

এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যেতে পারে যে $A \times B$ সংহতিটি গণনানুক্রমী।

তত্ত্ব 16. **A** এবং **B** দুটি সংহতির সংখ্যেয় সমাহার তাহলে প্রমাণ করুন $\{A \cup B : A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$ সংখ্যেয়। (Let *A* and *B* be Countable Collection of sets then)

$\{A \cup B : A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$ is also countable)

প্রমাণ : যেহেতু **A** সংখ্যেয়। অতএব **A** 'র সদস্যগুলি এইভাবে সাজান যাক। $< A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots >$

এখন আমরা নিম্নলিখিত অনুক্রম গঠন করি

$< A_1 \cup B, A_2 \cdots\cdots A_n \cup B \cdots \}$

এখন B সংহতিটি **B** এর নির্দিষ্ট সদস্য।

আমরা স্পষ্টই বলতে পারি $\{A \cup B : A \in \mathbf{A}\}$ সংখ্যেয়। যেহেতু B পছন্দমতো নেওয়া হয়েছে, অতএব

$\{A \cup B : A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$ সংখ্যায়,

তত্ত্ব 17. মূলদ রাশিগুলির সংহতি সর্বদাই গণনানুক্রমী (Set of all rational numbers is enumerable)

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $A_n = \left\{\frac{0}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \quad \ldots\ldots\right\}$

তাহলে স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে A_n হচ্ছে সেই সমস্ত মূলদ রাশির সংহতি যাদের হর (denominator) $n \in N$; 1 স্বাভাবিকভাবেই বলা যায় $A_n \sim N$.

কারণ $f : N \to A_n$ এবং সংজ্ঞায়িত করা হয় এইভাবে

$f(r) = \frac{r-1}{2n}$ যখন r বিজোড়

$= \frac{r}{2n}$ যখন r জোড়

এবং এটি একৈক সর্বগত চিত্রণ,

$\therefore \quad \cup\{A_n\}$ গণনানুক্রমী,

$\therefore$ মূলদ রাশিগুলির সংহতি গণনানুক্রমী।

তত্ত্ব 18. একক অন্তর [0, 1] কখনই গণনানুক্রমী নয় [The unit interval [0, 1] is not enumerable]

প্রমাণ ঃ ধরা যাক তত্ত্বটি ঠিক নয়। অর্থাৎ [0, 1] গণনানুক্রমী।

তাহলে $[0, 1) = < a_1, a_2, \cdots \quad >$ লেখা যায়

এখানে [0, 1] এর অন্তর্গত যে কোন সংখ্যাকে a_j এইভাবে লেখা যায়। এখন আমরা a_n 'কে অসীম ভগ্নাংশে প্রকাশ করে লিখছি—

$a_1 = 0 \cdot a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \cdots\cdots\cdots$

$a_2 = 0 \cdot a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \cdots\cdots\cdots$

$a_3 = 0 \cdot a_{31}\, a_{32}\, a_{33}$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$a_n = 0 \cdot a_{n1}\, a_{n2} \cdots\cdots$

এখানে $a_{ij} \in [0, 1, 2, \cdots\cdots 9]$.

এখন x বাস্তব রাশিটিকে এইভাবে প্রকাশ করা যাক

$x = 0.\, x_1\, x_2 \cdots\cdots x_n \cdots\cdots$

এখানে 1 থেকে 8 এর মধ্যে x_1 এমন একটি পূর্ণসংখ্যা যে $x_1 \neq a_{11}$; 1 থেকে 8 এর মধ্যে x_2 এমন একটি পূর্ণসংখ্যা যে $x_2 \neq a_{22}$. এইভাবে চলার পর আমরা বলতে পারি 1 থেকে 8 এর মধ্যে x_n এমন একটি পূর্ণসংখ্যা যে $x_n \neq a_{nn}$; তাহলে যে কোন n এর জন্য x এর দশমিক বিস্তৃতি x_n এর দশমিক বিস্তৃতি থেকে পার্থক্য হবে। যেহেতু $x_n \neq a_{nn}$, x-এর দশমিক বিস্তৃতি অনন্য কারণ কোন x_n 0 বা 9 হবে না। এ থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি x রাশিটি a_n থেকে পৃথক প্রত্যেকটি n এর জন্য এবং $0 \leq x \leq 1$; কিন্তু এটি একটি বিরোধী মত। অতএব আমাদের অনুমান সঠিক নয়। অর্থাৎ [0, 1] একক অন্তরটি গণনানুক্রমী নয়।

তত্ত্ব 19. বাস্তব রাশির সংহতি R গণনানুক্রমী নয়। (The set R of all real numbers is not enumerable).

প্রমাণ ঃ আমরা পূর্বেই দেখেছি যে কোণ গণনানুক্রমী সংহতির সহ-সংহতি হয় সীমিত না হয় গণনানুক্রমী। এখন যদি R'কে গণনানুক্রমী ধরা যায় তাহলে [0, 1]'কে গণনানুক্রমী হতে হবে। কিন্তু এটি সম্ভব নয়। অতএব বাস্তব রাশির সংহতি গণনানুক্রমী নয়।

তত্ত্ব 20. যদি B একটি অসংখ্যেয় সংহতি A 'র সংখ্যেয় সহ-সংহতি হয় তাহলে A – B অসংখ্যেয়। (Show that if B is a countable sub set of an uncountable set A, then A – B is uncountable).

প্রমাণ ঃ ধরা যাক A – B সংখ্যেয়। আমরা প্রমাণ করবো এই সিদ্ধান্তটি ঠিক নয় অর্থাৎ A – B অসংখ্যেয়। যেহেতু A – B সংখ্যেয় ধরা হয়েছে। অতএব $(A - B) \cup B$ সংখ্যেয়। আবার $B \subset A$ ধরা হয়েছে অতএব $(A - B) \cup B = A$ এবং A সংখ্যেয়। কিন্তু আমরা পূর্বেই ধরেছি A সংহতিটি অসংখ্যেয়। অর্থাৎ একটি বিরুদ্ধ মতের সম্মুখীন হচ্ছি। অর্থাৎ A – B অসংখ্যেয়।

তত্ত্ব 21. অমূলদ রাশির সংহতি অসংখ্যেয়। (Show that the set of all irrational numbers is uncountable).

প্রমাণ ঃ ধরা যাক R বাস্তব রাশির সংহতি এবং Q মূলদ রাশির সংহতি। আমরা জানি R অসংখ্যেয় এবং Q সংখ্যেয়।

$\therefore$ $R-Q$ পূর্বের তত্ত্ব অনুযায়ী অসংখ্যেয়। অর্থাৎ মূলদ রাশি-সমূহের সংহতি অসংখ্যেয়।

তত্ত্ব 22. 'R' এর প্রত্যেকটি রিক্তহীন উন্মুক্ত সহ-সংহতি হচ্ছে যুগলজাত অসংলগ্ন অন্তরাদির একমাত্র গণনীয় সংকলনের সমন্বয় (Every non-empty open subset of R is the union of a unique countable collection of pairwise disjoint open intervals).

প্রমাণ ঃ ধরা যাক R-এর একটি রিক্তহীন উন্মুক্ত সহ-সংহতি হচ্ছে G এবং $p \in G$ তাছাড়া ধরা যাক

$U_p=\{q :]\,p, q\,[\ \subset G\}$ এবং $L_p=\{q :]\,q, p\,[\subset G\}$.

যেহেতু G উন্মুক্ত সুতরাং আমরা একটি উন্মুক্ত অন্তর ধরা যাক $]\,a, b\,[$ পাব যার ফলে $p \in\ ]\,a, b\,[\ \subset G$. তাহলে $p \neq a$, $p \neq b$ এবং $]\,p, b\,[\subset G$, $]\,a, p\,[\ \subset G$; এ থেকে আমরা বলতে পারি $b \in U_p$ এবং $a \in L_p$ অর্থাৎ U_p এবং L_p রিক্তহীন। যদি U_p'র একটি ঊর্ধ্বাবদ্ধ থাকে এবং $M_p=\text{Sup } \{U_p\}$ তাহলে $]\,p, M_p\,[\subset G$। যদি U_p'র ঊর্ধ্বাবদ্ধ না থাকে তাহলে p এর দক্ষিণপার্শ্বের প্রতিটি বিন্দু G'এ অবস্থিত। অনুরূপভাবে বলা যায় যদি L_p'এর একটি নিম্নাবদ্ধ থাকে এবং $m_p=\inf\{L_p\}$ তাহলে $]\,m_p, p\ [\subset G$, যদি L_p'র নিম্নাবদ্ধ না থাকে তাহলে p'এর বামপার্শ্বে প্রতিটি বিন্দু G-এ অবস্থিত।

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি প্রতিটি বিন্দু $p \in G$ হলে একটি $p=]\,m_p, M_p\,[$ উন্মুক্ত অন্তর পাবো যেটি আবদ্ধ নয় (unbounded) এবং $p \in I_p$ এবং $I_p \subset G$. অতএব $G=\cup\{I_p : p \in G\}$। আমরা দেখাবো যদি G-স্থিত p এবং q দুটি স্বতন্ত্র বিন্দু হয় তাহলে $I_p=I_q$ অথবা $I_p \cap I_q=p$. ধরা যাক $I_p \cap I_q \neq \phi$. এবং যদি সম্ভব হয় তাহলে ধরা যাক $I_p \neq I_q$। তাহলে $I_p \cup I_q$ এমন একটি উন্মুক্ত অন্তর যার মধ্যে I_p

একটি সঠিক সহ-সংহতি হিসাবে অবস্থিত এবং G এর মধ্যে অবস্থিত। তাহলে আমরা বলতে পারি এমন একটি r পাওয়া যাবে যেটি U_p 'তে থাকবে এবং $r > M_p$ অথবা এমন একটি s পাওয়া যাবে যেটি L_p 'তে অবস্থিত এবং $s < m_p$ তাহলে কিন্তু $M_p = \text{Sup } \{U_p\}$ এই মতবাদের বিরুদ্ধাচরণ করে অথবা $m_p = \inf \{L_p\}$ এই মতেরও বিরুদ্ধাচরণ হেতু আমরা বলতে পারি $I_p \neq I_q$ এই সম্বন্ধটি ঠিক নয় অর্থাৎ আমরা বলতে পারি $I_p = I_q$। এই আলোচনা থেকে বলা যায় G হচ্ছে যুগলজাত অসংলগ্ন উন্মুক্ত অন্তরাদির সমন্বয় এবং এই অন্তরাদি গণনীয়।

এবার আমরা এই সমাহারের (Collection) অনন্যতা প্রমাণ করবো।

ধরা যাক $G = \cup\{I_p : p \in G\}$, $G = \cup\{J_q : q \in G\}$ এখানে I_p এবং J_q উভয়েই উন্মুক্ত অন্তর। সেহেতু $\cup\{I_p : p \in G\} = \cup\{J_q : q \in G\}$

সহজেই অনুমেয় যে একটি সমাহারের প্রত্যেকটি অন্তর দ্বিতীয় সমাহারের কোন অন্তরকে ছেদ করছে। ধরা যাক প্রথম সমাহারের I_{po} দ্বিতীয় সমাহারের J_{qo}-কে ছেদ করে এবং $I_{po} \cap J_{qo} \neq \phi$.

যেহেতু I_{po}-র প্রান্ত বিন্দুগুলি (end points) G-এর মধ্যে নেই সুতরাং $J_{qo} \subset I_{po}$। অনুরূপভাবে বলা যায় $I_{po} \subset J_{qo}$

অর্থাৎ $I_{po} = J_{qo}$।

এই আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায় আমরা আমাদের তত্ত্বটি প্রমাণে সক্ষম হলাম।

তত্ত্ব: একটি সংখ্যেয় সংহতি কখনই উৎকৃষ্ট নয়। (A countable set is never perfect).

প্রমাণ: ধরা যাক S একটি সংখ্যেয় সংহতি। S-এর সদস্যগুলি $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ এই সংখ্যেয় ক্রমে সাজানো হোলো। যদি সম্ভব হয় তাহলে ধরা যাক S সংহতিটি উৎকৃষ্ট, আমরা দেখাবো এটি অসম্ভব।

x_1 'কে মধ্য বিন্দু ধরে একটি রুদ্ধ অন্তর I_1 নেওয়া যাক এবং যেহেতু S সংহতিটিকে উৎকৃষ্ট ধরা হয়েছে অতএব I_1 অন্তরে S সংহতিটির অসীম সংখ্যক বিন্দু থাকবে।

ধরা যাক I_1 রুদ্ধ অন্তরে x_1 ব্যতীত সংখ্যেয় ক্রমে যে সব বিন্দু আছে তাদের মধ্যে x_i প্রথম বিন্দু। তাহলে আমরা বলতে পারি I_1 অন্তরে যে সব বিন্দু আছে তাদের সূচকগুলি i-এর চেয়ে বড়। যেহেতু S 'কে উৎকৃষ্ট

বলা হয়েছে অতএব x_i বিন্দুটি S সংহতিটির পরিণাম বিন্দু। সুতরাং x_1'কে যেভাবে আমরা ধরেছি ঠিক অনুরূপভাবে x_i 'এর ক্ষেত্রে ধরা যেতে পারে। আমরা x_i 'কে মধ্যবিন্দু ধরে I_2 একটি রুদ্ধ অন্তর গঠন করলাম। এর মধ্যে x_1 বিন্দুটি থাকবে না এবং এটি I_1 অন্তরটির অর্ধেক হবে কিন্তু সম্পূর্ণভাবে I_1 'এর মধ্যে অবস্থান করবে। ধরা যাক I_2 রুদ্ধ অন্তরে x_i ব্যতীত সংখ্যেয় ক্রমে যে সব বিন্দু আছে তাদের মধ্যে x_j প্রথম বিন্দু এবং $j > i$ এবং I_2 'তে অন্য যে সব বিন্দু আছে তাদের সূচক j 'এর চেয়ে বড়। x_i 'এর ক্ষেত্রে যে ভাবে আমরা অগ্রসর হয়েছি ঠিক অনুরূপভাবে x_j 'এর ক্ষেত্রে অগ্রসর হবো। এই পদ্ধতি অসীম সংখ্যক বার অনুসরণ করলে আমরা $I_1 \supset I_2 \supset \cdots\cdots$ রিক্তহীন রুদ্ধ সংহতিমালার অনুক্রম পাবো এবং $|I_n| \to 0$, যখন $n \to \infty$ হয়। তাহলে সহজেই আমরা এমন একটি বিন্দু $x_0 \in R$ পাবো যার ফলে $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$ এবং এই x_0 বিন্দুটি S সংহতির পরিণাম বিন্দু। যেহেতু S সংহতিটি রুদ্ধ অতএব $x_0 \in S$। ধরা যাক $x_0 = x_k$; তাহলে $x_k \in I_k$, $k > 1$; অনুরূপ ভাবে $i, j \cdots\cdots$ প্রভৃতির চেয়ে k 'কে বড় ধরা হোক। অতএব $1, i, j, \cdots\cdots$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার যে অনুক্রম পাওয়া গেল তার নিশ্চয়ই একটি ঊর্ধ্বাবদ্ধ ধরা যাক k আছে ; অর্থাৎ তারা সীমিত সংখ্যক হতে পারে। এটি বিরুদ্ধ মত হচ্ছে। এই বিরোধী মত হবার পিছনে আমরা যে বলেছি S সংহতিটি উৎকৃষ্ট। অতএব এটি ঠিক নয় অর্থাৎ সংখ্যেয় সংহতিটি কখনই উৎকৃষ্ট নয়।

তত্ত্ব : A এবং B দুটি প্রথম প্রজাতির সংহতি, তাহলে $A \cup B$ প্রথম প্রজাতির সংহতি হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক $A_1, A_2, \cdots\cdots$ অঘন সংহতিসমূহের অনুক্রম এবং $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

আবার ধরা যাক $B_1, B_2, B_3, \cdots\cdots$ অঘন সংহতিসমূহের অনুক্রম এবং $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$; এখন $A \cup B$ হচ্ছে $A_n \cup B_n$ অঘন সংহতিসমূহের সমন্বয়। অতএব $A \cup B$ প্রথম প্রজাতির সংহতি।

তত্ত্ব : বাস্তব রেখা R দ্বিতীয় প্রজাতির সংহতি (The real line R is of the second category).

(এইটিকে বায়ার প্রজাতি তত্ত্ব বলে)

প্রমাণ ঃ ধরা যাক R দ্বিতীয় প্রজাতির সংহতি নয়। তাহলে এটি প্রথম প্রজাতির সংহতি।

সুতরাং $R=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ এখানে প্রত্যেকটি A_n অঘন এবং $(\bar{A}_n)^\circ=\phi$. আমরা মনে করি প্রত্যেকটি A_n রুদ্ধ সংহতি। অন্যথায় আমরা A_n-এর স্থলে $\bar{A}_n$ নেব এবং $R=\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ এবং প্রত্যেকটি $\bar{A}_n$ রুদ্ধ এবং অঘন।

ধরা যাক x_1 যে কোন একটি বিন্দু যেটি A-সংহতিতে নেই। যেহেতু A_1 রুদ্ধ অতএব x_1 বিন্দুটি A_1-সংহতিটির পরিণামবিন্দু নয়। অতএব x_1'কে কেন্দ্র ক'রে I_1 একটি অন্তর পাব যার মধ্যে A_1 'এর কোন সদস্য থাকছে না। ধরা যাক J_1 একটি রুদ্ধ অন্তর এবং $J_1 \subset I_1$ কিন্তু $0<|J|<1$; তাহলে সহজেই বলা যায় $J_1 \cap A_1=\phi$. J_1-এ যে সব প্রান্তবিন্দুসমূহ (end points) ছিল সেগুলি নিয়ে J_1' একটি উন্মুক্ত অন্তর ধরা হোলো। এখন A_2 অঘন। সুতরাং এর মধ্যে J_1' উন্মুক্ত অন্তরটি অবস্থান করবে না। আমরা x_2-কে এমনভাবে নিলাম যার ফলে $x_2 \in J_1'$ হয় কিন্তু $x_2 \notin A_2$। তাহলে ঠিক পূর্বের মতো x_2 কে কেন্দ্র ক'রে একটি উন্মুক্ত অন্তর I_2 পাবো যার মধ্যে A_2 'র কোন সদস্য থাকবে না। যেহেতু J_1' উন্মুক্ত অতএব I_2 কে এমনভাবে নেওয়া হোলো যার ফলে $I_2 \subset J_2' \subset J_1'$; ধরা যাক J_2 রুদ্ধ অন্তর $J_2 \subset I_2$
কিন্তু $0<|J_2'|<\frac{1}{2}$.

তাহলে সহজেই বলা যায় $J_2 \cap A_2=\phi$. এই পদ্ধতি অনুসরণ করতে থাকলে আমরা রিক্তহীন রুদ্ধ অন্তরের একটি অনুক্রম $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \cdots\cdots$ পাব যার ফলে $0<|J_n|<\dfrac{1}{n}$ এবং $J_n \cap A_n=\phi$ হবে।

সুতরাং আমরা বলতে পারি এমন একটি বিন্দু $x_0 \in R$ পাব যার ফলে $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n=\{x_0\} \Rightarrow \forall n\ x_0 \in J_n$। অতএব $x_0 \notin A_n$ যে কোন n এর জন্য।

$$\therefore\ x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

এটি স্ববিরোধী অতএব $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ প্রথম প্রজাতির নয় অর্থাৎ R দ্বিতীয় প্রজাতির সংহতি।

অষ্টম অধ্যায়

সংহতির কয়েকটি বৈশিষ্ট্য

8·1 **সংজ্ঞা ঃ স্থূল ঊর্ধ্বাবদ্ধ ঃ** ধরা যাক S একটি সংহতি। M একটি রাশি। যদি S সংহতির প্রত্যেকটি সদস্যই M-এর চেয়ে ছোট অথবা সমান হয় তাহলে ঐ M-কে স্থূল ঊর্ধ্বাবদ্ধ বলা হবে।

8·2 **সংজ্ঞা ঃ স্থূল নিম্নাবদ্ধ ঃ** ধরা যাক S একটি সংহতি এবং m একটি রাশি। যদি S সংহতির প্রত্যেকটি সদস্যই m এর চেয়ে বড় বা সমান হয় তাহলে ঐ m-কে স্থূল নিম্নাবদ্ধ বলা হবে।

8·3 **সংজ্ঞা ঃ ঊর্ধ্বাবদ্ধ** (Exact upper bound) ঃ কতকগুলি স্থূল ঊর্ধ্বাবদ্ধের মধ্যে যেটি সবচাইতে ছোট তাকে সঠিক ঊর্ধ্বাবদ্ধ বলা হয়। এখন থেকে সঠিক ঊর্ধ্বাবদ্ধ-কে শুধু ঊর্ধ্বাবদ্ধ বলা হবে।

8·4 **সংজ্ঞা ঃ নিম্নাবদ্ধ** (Exact lower bound) ঃ কতকগুলি স্থূল নিম্নাবদ্ধের মধ্যে যেটি সবচাইতে বড় তাকে সঠিক নিম্নাবদ্ধ বলা হয়। এখন থেকে সঠিক নিম্নাবদ্ধকে নিম্নাবদ্ধ বলা হবে।

8·5 **তত্ত্ব 1.** যে কোন সংহতি S ঊর্ধ্বাবদ্ধ হলে এমন একটি রাশি G পাব যার ফলে

(ক) S সংহতির প্রত্যেকটি রাশি G 'এর ছোট অথবা সমান হবে।

(খ) ϵ যে কোন একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্র রাশি, আমরা S সংহতির এমন একটি সদস্য পাব যেটি $G-\epsilon$ অপেক্ষা বড়।

প্রমাণ ঃ সমস্ত বাস্তব রাশিগুলিকে L এবং R এই দুটি বিভাগে এমন ভাবে ভাগ করা হোলো যার ফলে S সংহতির অন্ততপক্ষে একটি রাশি অপেক্ষা যে রাশিটি ছোট সেটি L বিভাগে রাখা হোলো এবং বাকীগুলি R বিভাগে রাখা হোলো।

স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে প্রতিটি রাশি কোন-না-কোন বিভাগে অবস্থান করছে। আমরা বলেছি S সংহতির যে কোন রাশি অপেক্ষা ছোট হোলে সেই রাশিটি L বিভাগে থাকবে। এবং K যদি স্থূল ঊর্ধ্বাবদ্ধ হয় তাহলে এটি R বিভাগে

থাকবে। অর্থাৎ আমরা দেখতে পেলাম প্রতিটি বিভাগের অস্তিত্ব রয়েছে। এখন কোন একটি রাশি যেটি L বিভাগের সদস্য অপেক্ষা ছোট সেটি নিশ্চয়ই S সংহতিস্থ কোন রাশি অপেক্ষা ছোট হবে এবং স্বভাবতই সেটি L বিভাগে থাকবে। তাহলে আমরা দেখতে পেলাম L এবং R এই দুটি বিভাগ মিলে বাস্তব রাশির বিভাগীকরণ গঠন করছে। সুতরাং আমরা এমন একটি রাশি G পেতে পারি যেটি এই বিভাগদ্বয়কে পৃথক করে। G এর চেয়ে ছোট রাশিগুলি L বিভাগে নেওয়া হোলো এবং G এর চেয়ে বড় রাশিগুলি R বিভাগে নেওয়া হোলো। [G যে কোন বিভাগে থাকতে পারে] আমাদের দেখাতে হবে ϵ যত ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশিই হোক S সংহতিস্থ এমন একটি রাশি পাওয়া যাবে যেটি $G-\epsilon$ অপেক্ষা বড়।

এখন যেহেতু $G-\epsilon$ ($\epsilon > 0$) G এর চেয়ে ছোট। সুতরাং এটি L বিভাগে অবস্থান করবে। কিন্তু আমরা জানি দুটি ভিন্ন বাস্তব রাশির মধ্যে অসীম সংখ্যক বাস্তব রাশি অবস্থান করে। এই তত্ত্বের সাহায্যে আমরা বলতে পারি $G-\epsilon$ রাশিটি S সংহতির অন্ততপক্ষে একটি রাশি অপেক্ষা ছোট।

এরপর আমরা দেখাবো S সংহতির কোন সদস্যই G রাশির চেয়ে বড় হবে না। সম্ভব হলে ধরা যাক $G+\eta$ ($\eta > 0$) S সংহতিস্থ একটি রাশি যেটি G এর চেয়ে বড়। তাহলে $[G, G+\eta]$ এই উন্মুক্ত অন্তরের প্রতিটি রাশিই R বিভাগে অবস্থান করবে কারণ এক্ষেত্রে প্রতিটি রাশিই G অপেক্ষা বড়। কিন্তু এগুলি আবার $G+\eta$ অপেক্ষা ছোট এবং সেইহেতু এগুলি L বিভাগে থাকবে (কারণ আমরা প্রথমেই বলেছি L বিভাগে সেই সমস্ত রাশি রাখা হয়েছে যেগুলি S সংহতির কোন-না-কোন রাশি অপেক্ষা ছোট)। অতএব আমরা পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হচ্ছি। এই পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত হবার কারণ – যেহেতু আমরা ধরেছি S সংহতিস্থ এমন একটি রাশি $G+\eta$ পাওয়া যাবে যেটি G অপেক্ষা বড়। অতএব এই সিদ্ধান্ত ঠিক নয়। অতএব আমরা আমাদের তত্ত্বটি প্রমাণ করতে সক্ষম হলাম।

8·6 তত্ত্ব 2. কোন নিম্নাবদ্ধ সংহতিতে এমন একটি সদস্য (রাশি) g পাওয়া যাবে যার ফলে

(ক) S সংহতিস্থ প্রতিটি সদস্যই g অপেক্ষা বড় অথবা সমান হবে। অর্থাৎ $g \leq x \ \forall \ x \in S$.

(খ) S সংহতিস্থ এমন একটি সদস্য পাওয়া যাবে যেটি $g+\epsilon$ অপেক্ষা ছোট। এখানে ϵ একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশি।

প্রমাণ ঃ (ক) ধরা যাক $g \nleq x$ (এখানে x-কে S সংহতির একটি সদস্য ধরা হয়েছে)। তাহলে $g > x$ হবে।

ধরা যাক $g = x + \delta$ (δ একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্র রাশি)। তাহলে $g - \frac{1}{2}\delta > x$.

কিন্তু $g - \frac{1}{2}\delta < g$ এবং এটি একটি স্থূল নিম্নাবদ্ধ। সুতরাং আমরা ধরেছিলাম $g > x$ তা ঠিক নয়

$\therefore \ g \leq x \ \forall \ x \in S$.

(খ) সর্তটি প্রমাণ করতে গেলে আমরা ধরে নিলাম $g+\epsilon$ থেকে ছোট কোন রাশি S সংহতিতে নেই।

অর্থাৎ $g+\epsilon \leq x \ \ \forall \ x \in S$.

$g+\frac{1}{2}\epsilon < x \ \forall x \in S$.

তাহলে $g+\frac{1}{2}\epsilon$ স্থূল নিম্নাবদ্ধ কিন্তু এটি সম্ভব নয় কারণ $g+\frac{1}{2}\epsilon > g$ অতএব আমাদের কল্পনাটি ঠিক নয়। অতএব (খ) সর্তটি প্রমাণিত হোলো।

সংজ্ঞা ঃ কোন বিন্দুর প্রতিবেশী অঞ্চল ঃ R একটি বাস্তব রাশির সংহতি। ধরা যাক x একটি বাস্তব রাশি। $N \subset R$ এবং $x \in N$ তাহলে এই N-কে x এর প্রতিবেশী অঞ্চল বলা হবে যদি $\exists \ ]a, b[$ যার ফলে $x \in \ ]a, b[\ \subset N$ হয়।

সংজ্ঞা ঃ x এর $\in$ প্রতিবেশী অঞ্চল ঃ ধরা যাক $]a, b[$ অন্তরে x একটি বাস্তব রাশি। যেহেতু $a < x < b$ তাহলে অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ϵ পাওয়া যাবে যার ফলে $]x-\epsilon, x+\epsilon[\ \subset \ ]a, b[$ তাহলে $]x-\epsilon, \ x+\epsilon[$ 'কে $]a, \ b[$ অন্তরস্থ x 'এর ϵ প্রতিবেশী অঞ্চল বলা হবে। এবং $N(x, \epsilon)$ এই প্রতীক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হবে।

সুতরাং $N(x, \epsilon)=\{y \in R : |y-x| < \epsilon\}$

তত্ত্ব 1. লাগোয়াহীন অন্তরাদির আবদ্ধ সংহতি গণনানুক্রমী। (A bounded set of non-overlapping intervals is enumerable)

প্রমাণ ঃ ধরা যাক G লাগোয়াহীন অন্তরাদির সংহতি এবং আরও ধরা যাক $[a, b]$ অন্তরের মধ্যে G অবস্থান করে। আমরা এখন এই সমস্ত অন্তরগুলিকে অনুক্রমে সাজাবো। প্রথমে সেই অন্তরটি লওয়া হলো (যদি অবশ্য অস্তিত্ব থাকে) যেটির দৈর্ঘ্য $(b-a)/2$ 'এর থেকে বড় অথবা সমান। তারপর সেই সমস্ত অন্তরগুলি নেওয়া হোলো যাদের দৈর্ঘ্য $(b-a)/2$ এর ছোট এবং $(b-a)/3$ 'এর চেয়ে বড়। এর পর সেই সমস্ত অন্তর নেওয়া হোলো যেগুলি $(b-a)/3$ 'এর চেয়ে ছোট কিন্তু $(b-a)/4$ 'এর চেয়ে বড়। এইভাবে আমরা অগ্রসর হতে থাকি। স্বাভাবিকভাবেই বলা যায় প্রতিটি দলে অন্তরের সংখ্যা সীমিত কারণ অন্তরাদি দৈর্ঘ্য $(b-a)/n$ 'এর চেয়ে বড় অথবা সমান হওয়ার জন্য কখনই এসব সংখ্যা n এর চেয়ে বেশী হবে না। অতএব G গণনানুক্রমী।

তত্ত্ব 2. তটস্থ সংহতি গণনানুক্রমী (An isolated set is enumerable)

ধরা যাক G একটি তটস্থ সংহতি। তাহলে G 'এর কোন বিন্দুই পরিণাম বিন্দু নয়। তাহলে বলা যায় G এর প্রতিটি বিন্দুকে ঘিরে যে অন্তর পাওয়া যাবে তার মধ্যে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটি ছাড়া G সংহতির অন্য কোন বিন্দু অবস্থান করবে না। যদি কখনও এই ধরনের দুটি অন্তর লাগোয়া হয় (overlapping) তাহলে এই দুটি অন্তরের প্রত্যেকটিকে আরও ছোট করা হবে যাতে তারা লাগোয়া না হয়।

এইভাবে আমরা লাগোয়াহীন অন্তরসমূহের সংহতি পাব এবং পূর্বের তত্ত্বানুযায়ী বলা যায় এটি গণনানুক্রমী। যেহেতু প্রতিটি অন্তর G সংহতির প্রতিটি বিন্দুর সঙ্গে অনন্যরূপে প্রতিষঙ্গী অতএব তটস্থ সংহতি G গণনানুক্রমী।

তত্ত্ব 3. যদি A এবং B সংহতিদ্বয় বাস্তরাশির সংহতি R 'এর সহ-সংহতি হয় তাহলে প্রমাণ করুন

(i) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B$

(ii) $(A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B'$.

এখানে A', এবং B' হচ্ছে A এবং B সংহতিদ্বয়ের উদ্ভূত (derived) সংহতি।

প্রমাণ : (i) ধরা যাক x বিন্দুটি A'-সংহতির যে কোন একটি বিন্দু। এখন $x \in A' \Rightarrow x$ বিন্দু A-সংহতিটির একটি পরিণাম বিন্দু।

$\Rightarrow x$ এর প্রতিটি প্রতিবেশী অঞ্চল $(A - \{x\})$ 'কে ছেদ করে।

$\Rightarrow N \cap (A - \{x\}) \neq \phi$ এখানে N হচ্ছে x-এর প্রতিবেশী অঞ্চল।

$\Rightarrow N \cap (B - \{x\}) \neq \phi$ যেহেতু $A \subset B$.

$\Rightarrow x$ বিন্দুটি B-সংহতির পরিণাম বিন্দু

$\Rightarrow x \in B'$

$\therefore \quad A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$.

(i) $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow A \cup B$ সংহতিটির x একটি পরিণাম বিন্দু

$\Leftrightarrow [N \cap \{(A \cup B) - \{x\}] \neq \phi$ এখানে N হচ্ছে x 'এর একটি প্রতিবেশী অঞ্চল

$\Leftrightarrow [N \cap (A - \{x\})] \cup [N \cap (B - \{x\}]$

$\Leftrightarrow N \cap (A - \{x\}) \neq \phi$.

বা $N \cap (B - \{x\}) \neq \phi$.

$\Leftrightarrow x \in A'$ বা $x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in A' \cup B'$

$\therefore \quad (A \cup B)' = A' \cup B'$.

তত্ত্ব 4. ধরা যাক $x \in A \subset R$ এবং $N(x, \epsilon)$ x বিন্দুটির প্রতিবেশী অঞ্চল। যদি $p \in N(x, \epsilon)$ হয় তাহলে p 'কে ঘিরে একটি প্রতিবেশী অঞ্চল গঠন করা যাবে যেটি $N(x, \epsilon)$ প্রতিবেশী অঞ্চলের মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ : যেহেতু দেওয়া আছে $p \in N(x, \epsilon)$ অতএব

$|p - x| < \epsilon \quad \therefore \quad \epsilon - |p - x| > 0.$

ধরা যাক δ একটি ধনাত্মক রাশি এবং $\delta < \epsilon - |p - x|$

এখন আমাদের দেখাতে হবে $N(p, \delta) \subset N(x, \epsilon)$.

$N(p, \delta)$ এই প্রতিবেশী অঞ্চলে a একটি পছন্দমতো সদস্য।

তাহলে $|a-p| < \delta < \epsilon - |p-x|$

এখন $|a-x| = |a-p+p-x| \leq |a-p| + |p-x|$

$\therefore \quad |a-x| < \epsilon - |p-x| + |p-x| = \epsilon.$

অর্থাৎ $|a-x| < \epsilon \Rightarrow a \in N(x, \epsilon)$

অতএব এ থেকে আমরা বলতে পারি $N(p, \delta)$ প্রতিবেশী অঞ্চলের প্রতিটি সদস্য $N(x, \epsilon)$ প্রতিবেশী অঞ্চলের সদস্য।

অর্থাৎ $N(p, \delta) \subset N(x, \epsilon)$.

তত্ত্ব 5. কোন একটি বিন্দুর দুটি প্রতিবেশী অঞ্চলের ছেদ ঐ বিন্দুটির প্রতিবেশী অঞ্চল হবে।

প্রমাণঃ ধরা যাক $x \in A$ বিন্দুটির N_1 এবং N_2 দুটি প্রতিবেশী অঞ্চল। তাহলে ϵ_1 এবং ϵ_2 দুটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি পাওয়া যাবে যার ফলে

$]x-\epsilon_1, x+\epsilon_1[\subset N_1$ এবং $]x-\epsilon_2, x+\epsilon_2[\subset N_2$

ধরা যাক $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ [বা $\epsilon =$ লঘিষ্ঠ (ϵ_1, ϵ_2)] তাহলে

$$]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset]x-\epsilon_1, x+\epsilon_1[\subset N_1$$

$$]x-\epsilon, x+\epsilon, [\subset]x-\epsilon_1, x+\epsilon_2[\subset N_2.$$

অর্থাৎ $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset N_1 \cap N_2$

অতএব x বিন্দুটি একটি প্রতিবেশী অঞ্চল $N_1 \cap N_2$ পাওয়া যাছে।

তত্ত্ব 6. ধরা যাক p এবং q দুটি ভিন্ন বাস্তব রাশি। $N(p, \epsilon_1)$ এবং $N(q, \epsilon_2)$ যথাক্রমে p এবং q এর দুটি প্রতিবেশী অঞ্চল। যদি $x \in N(p, \epsilon_1) \cap N(q, \epsilon_2)$ তাহলে x 'কে ঘিরে M একটি প্রতিবেশী অঞ্চল পাওয়া যাবে৷ যার ফলে

$$M \subset N(p, \epsilon_1) \cap N(q, \epsilon_2)$$

প্রমাণ ঃ এখানে বলা আছে

$x \in N(p, \epsilon_1) \cap N(q, \epsilon_1) \Rightarrow x \in N(p, \epsilon_1)$ এবং $x \in N(q, \epsilon_2)$

এখন $x \in N(p, \epsilon_1) \Rightarrow |x-p| < \epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_1 - |x-p| > 0$

এবং $x \in N(q, \epsilon_2) \Rightarrow |x-q| < \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_2 - |x-q| > 0$

ধরা যাক $\epsilon = \text{Min}\{\epsilon_1 - |x-p|, \epsilon_2 - |x-q|\}$

ধরা যাক $N(x, \epsilon)$ প্রতিবেশী অঞ্চলে a একটি বিন্দু।

তাহলে $|a-x| < \epsilon \leq \epsilon_1 - |x-p|$

অতএব $|a-p| = |a-x+x-p| \leq |a-x| + |x-p|$

অর্থাৎ $|a-p| \leq |a-x| + |x-p|$

$$< \epsilon_1 - |x-p| + |x-p|$$

$$= \epsilon_1$$

$\Rightarrow a \subset N(p, \epsilon_1)$

অতএব $N(x, \epsilon) \subset N(p, \epsilon_1)$.

ঠিক অনুরূপভাবে আমরা দেখাতে পারবো $N(x, \epsilon) \subset (q, \epsilon_2)$

অতএব $N(x, \epsilon) \subset N(p, \epsilon_1) \cap N(q, \epsilon_2)$

এখন $M = N(x, \epsilon)$ ধরলে সহজেই বলা যায়

$M \subset N(p, \epsilon_1) \cap N(q, \epsilon_2)$.

তত্ত্ব 7. R একটি বাস্তব রাশির সংহতি এবং $A \subset R$ তাহলে প্রমাণ করুন

(i) A° হচ্ছে R সংহতির একটি উন্মুক্ত সহ-সংহতি

(ii) A 'র মধ্যে A° সবচেয়ে বড় উন্মুক্ত সংহতি

(iii) A উন্মুক্ত হবে যদি $A^\circ = A$ হয়

মনে রাখা প্রয়োজন এখানে A° বলতে A'র অন্তস্থ সংহতি (Interior set) বলা হয়েছে।

(i) ধরা যাক $x \in A^\circ$। তাহলে A সংহতিটির x হচ্ছে অন্তস্থ বিন্দু অর্থাৎ A হচ্ছে x 'এর প্রতিবেশী অঞ্চল। সুতরাং এমন একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা পাওয়া যাবে যার ফলে বলা যাবে

$$x \in]\, x-\epsilon,\, x+\epsilon\, [\, \subset A.$$

যেহেতু $]x-\epsilon,\ x+\epsilon[$ উন্মুক্ত অন্তর অতএব এটির অন্তর্গত প্রত্যেকটি বিন্দুর প্রতিবেশী অঞ্চল হিসাবে এটিকে খাড়া করা যেতে পারে এবং এটির অধিসংহতি A ; এটির অন্তর্গত প্রত্যেকটি বিন্দুর প্রতিবেশী অঞ্চল হিসাবে ধরা যেতে পারে। অতএব বলা যায় $]\, x-\epsilon,\ x+\epsilon\, [$ অন্তর্গত প্রত্যেকটি বিন্দুই A-সংহতির অন্তস্থ বিন্দু।

অতএব $]x-\epsilon,\, x+\epsilon[\, \subset A^{\circ}$.

এ থেকে বলা A° হচ্ছে x এর প্রতিবেশী অঞ্চল।

যেহেতু x 'কে পছন্দমতো লওয়া হয়েছে অতএব বলা যায় A° উন্মুক্ত সংহতি।

(ii) ধরা যাক G একটি উন্মুক্ত সংহতি এবং $G \subset A$.

ধরা যাক $x \in G$। যেহেতু G 'কে উন্মুক্ত ধরা হয়েছে অতএব এটি x এর প্রতিবেশী অঞ্চল। G 'এর অধিসংহতি A x'র প্রতিবেশী অঞ্চল। অর্থাৎ বলা যায় x হচ্ছে A'র অন্তস্থ বিন্দু। অতএব

$$x \in G \Rightarrow x \in A^{\circ} \text{ অর্থাৎ } G \subset A^{\circ}$$

অতএব A° 'র মধ্যে A'র প্রত্যেকটি উন্মুক্ত সহ-সংহতি অন্তর্ভুক্ত করা যায়। অর্থাৎ A° হচ্ছে A 'র সর্ববৃহৎ উন্মুক্ত সহ-সংহতি

(iii) (ক) যদি $A^{\circ} = A$ হয় তাহলে (i) থেকে বলা যায় A° হচ্ছে A 'র উন্মুক্ত সহ-সংহতি অতএব A উন্মুক্ত।

(খ) বিপরীতক্রমে

যদি A উন্মুক্ত হয় তাহলে (ii) এর সাহায্যে বলা যায় A° হচ্ছে A 'র সর্ববৃহৎ উন্মুক্ত সহ-সংহতি।

অতএর এটি নিশ্চয়ই A 'র অনুরূপ হবে

অর্থাৎ $A^{\circ} = A$.

তথ্য সূত্র (ইংরাজী)

[1] Brahma Nand, B. S. Tyagi, R. L. Gupta : Set theory and number system, Shalini Prakashan.

[2] Brahma Nand, B. S. Tyagi, R. L. Gupta : Mathematical Analysis II, Shalini Prakashan.

[3] E. W. Hobson : The theory of functions of a real variables and the theory of Fourier series, Dover Publication.

[4] James. R. Munkres : Topology, a first course. Prentice-Hall of India Private Limited.

[5] Shanti Narayan : A course of Mathematical Analysis, S. Chand & Co.

[6] Sharma and Vasishtha : Mathematical Analysis II, Krishna Prakashan Mandir.

[7] J. N. Sharma and A. R. Vasishtha : Functional Analysis, Krishna Prakashan Mandir.

[8] A. R. Vasishtha : Modern Algebra, Krishna Prakashan Mandir.

তথ্য সূত্র (বাংলা)

[1] প্রদীপকুমার মজুমদার, বাস্তব সংখ্যা ও সহযোগী তত্ত্ব, পরিবেশক —গবেষণা

[2] যশোদাকান্ত রায়, গাণিতিক বিশ্লেষণ (প্রথম খণ্ড), প্রাপ্তিস্থান, নবভারত পাবলিশার্স ।

[3] গণিত জগৎ এবং গণিতবার্তায় প্রকাশিত প্রদীপকুমার মজুমদারের প্রবন্ধাবলী, প্রাপ্তিস্থান—৬০ তালপুকুর রোড, নৈহাটি, ২৪ পরগণা।

[4] আবু সয়ীদ আইয়ুব, আধুনিকতা ও রবীন্দ্রনাথ, দেজ পাবলিশিং ।

ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দাবলী (বাংলা থেকে ইংরাজী)

অখণ্ড সংখ্যা—Natural number.
অগণনানুক্রমী সংহতি—Non enumerable set.
অঘন সংহতি—Non-dense set.
অতএব—Therefore.
অনন্ত—Infinite.
অনন্ত পর্যাপ্তি—Continuum.
অনুসিদ্ধান্ত—Corollary.
অনুক্রম—Sequence.
অন্তর্গত চিত্রণ—Into mapping.
অন্তস্থ বিন্দু (অভ্যন্তরীণ বিন্দু)—Interior point.
অপসারী—Divergent.
অপসারিতা—Divergence.
অবচিত্রণ—Inclusion mapping
অবচ্ছেদ—Section.
অবশিষ্ট সংহতি—Residual set.
অবিচ্ছিন্ন—Continuity.
অভেদ—Identity.
অভিন্ন—Identical.
অভিসারিত—Convergence.
অভিসারী—Convergent.
অমূলদ রাশি—Irrational number.
অসীম—Infinite.
অসীম সংহতি—Infinite set.
আন্তর্পরিণামী সংহতি—Inner limiting set.
আবদ্ধ—Bounded.
আবৃত্ত—Recurring.
ইচ্ছানুরূপ—Arbitrary.
উদ্ভূত সংহতি—Derived set.

ঊর্ধ্বাবদ্ধ—Upper bound.
উন্মুক্ত আবরণ—Open cover.
উপাদান—Element.
উপপাদ্য—Theorem.
উপ-পরিবার—Sub family.
উৎকৃষ্ট সংহতি—Perfect set.
ঊর্ধ্বগ—Increasing.
ঊর্ধ্বগক্রম—Ascending order.
ঋণাত্মক—Negetive.
একক সংহতি—Singleton set.
একান্বয়ী—Monotonic.
একান্বয়ে নিম্নগ—Monotonic decreasing.
একান্বয়ে ঊর্ধ্বগ—Monotonic increasing.
একৈক অন্তর্গত চিত্রণ—One-one into mapping.
একৈক চিত্রণ—One-one mapping.
একৈক প্রতিষঙ্গ—One-one correspondence.
একৈক সর্বগত চিত্রণ—one-one onto mapping.
গণনানুক্রমী—Enumerable.
গাণিতিক ক্রিয়া (প্রক্রিয়া) Mathematical operation.
ঘনত্ব—Density.
চিত্রণ—Mapping.
জ্যামিতিক চিত্র (রূপ)—Geometrical representation.
তুল্য—Equivalent.
তুল্যত্ব—Equivalence.
দুটি সংহতির অন্তর বা ভেদ—Difference of two sets.
দুটি সংহতির ছেদ—Intersection of two sets.
দুটি সংহতির সমন্বয়—Join (or union) of two sets.
দ্বিতীয় প্রজাতির সংহতি—Set of the second category.
ধনাত্মক—Positive.
ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা—Positive integer.
নির্দিষ্ট—Definite.

নিম্নগ—Decreasing.
নিম্নাবদ্ধ—Lower bound.
পূর্ণ সংখ্যা—Integer.
পরমমান—Absolute value.
প্রতিসম—Symmetric.
প্রতিসম ভেদ—Symmetric difference.
প্রতিসাম্য—Symmetry.
প্রতিষঙ্গ—Correspondence.
প্রতিষঙ্গী—Corresponding.
প্রতিবর্তিতা—Reflexivity.
প্রতীক চিত্র—Representation.
বদ্ধ—Bounded.
বর্ণনামূলক সংহতি তত্ত্ব—Descriptive set theory.
বণ্টক নিয়ম—Distributive law.
বহু-এক অন্তর্গত চিত্রণ—Many-one into mapping.
বহু-এক চিত্রণ—Many-one mapping.
বহু-এক সর্বগত চিত্রণ—Many-one onto mapping.
বহির্পরিণামী বিন্দু—outer limiting point.
বাস্তব রাশি (সংখ্যা)—Real number.
বিনিময় নিয়ম—Commutative law.
বিন্দু—Point.
বিপরীত—Reciprocal.
বিপরীতক্রমে—Conversely.
বিভাগীকরণ—Section.
বৈশিষ্ট্য—Property.
ব্যস্ত চিত্রণ—Inverse mapping.
বৃহত্তর—Greater.
ভূমি—Domain.
মূলদরাশি—Rational number.
মূলবিন্দু—Origin.
মূলাংক ভগ্নাংশ—Radix fraction.

রিক্ত সংহতি—Null set.
রুদ্ধ সংহতি—Closed set.
শূন্য—Zero.
শ্রেণী—Series.
সঠিক সহ-সংহতি—Proper sub set.
সমতা—Equality.
সমষ্টি—Aggregate
সমান—Equal.
সমহার—Aggregate
সসীম সংহতি—Finite set.
সহ-সংহতি—Sub set.
সংহতি—Set.
সংহতির পূরক—Complement of a set.
সংহতিদ্বয়ের সমতা—Equality of two sets.
সংহতিদ্বয়ের গুণন—Product of two sets.
সংক্রমিতা—Transivity.
সংযোগ নিয়ম—Associative law.
স্থূল ঊর্ধ্বাবদ্ধ—Rough upper bound.
স্থূল নিম্নাবদ্ধ—Rough lower bound.
স্বঘন—Dense in itself.
সাধারণ আন্তর্পারিণামী সংহতি—Ordinary inner limiting set.
সাধারণ বহির্পারিণামী সংহতি—Ordinary outer limiting set.
সার্বভৌমিক সংহতি—Universal set.
সার্বিক ঘন—Everywhere dense.
সীমিত—Finite.

ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দাবলী (ইংরাজী থেকে বাংলা)

Absolute value—পরম মান।
Aggregate—সমষ্টি, সমাহার।
Arbitrary—ইচ্ছানুরূপ।
Arithmetical operation—গাণিতিক ক্রিয়া বা প্রক্রিয়া।
Arrange—সাজান।
Ascending order—ঊর্ধ্বগ ক্রম।
Associative law—সংযোগ নিয়ম।
Bounded—বদ্ধ, সীমাবদ্ধ।
Closed set—রুদ্ধ সংহতি।
Commutative law—বিনিময় নিয়ম।
Complement of a set—সংহতির পূরক।
Continuum—অনন্ত পর্যাপ্তি।
Continuity—সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন।
Convergence—অভিসারিতা।
Convergent—অভিসারী।
Conversely—বিপরীতক্রমে।
Corollary—অনুসিদ্ধান্ত।
Correspondence—প্রতিষঙ্গ।
Corresponding—প্রতিষঙ্গী।
Decreasing—নিম্নগ।
Definite—নির্দিষ্ট।
Density—ঘন।
Dense in itself—স্বঘন।
Derived set—উদ্ভূত সংহতি।
Descriptive set theory—বর্ণনামূলক সংহতি তত্ত্ব।
Difference of two sets—দুটি সংহতির অন্তর অথবা ভেদ।
Distributive law—বিতরক নিয়ম, বণ্টক নিয়ম।
Divergence—অপসারিতা।

Divergent—অপসারী।
Domain—ভূমি।
Element—উপাদান।
Enumerable—গণনানুক্রমী।
Equal—সমান।
Equality—সমতা।
Equality of sets—সংহতিমালার সমতা।
Equivalent—তুল্য।
Equivalence—তুল্যত্ব।
Everywhere dense—সার্বিক ঘন।
Finite—সীমিত, সসীম।
Finite set—সসীম-সংহতি।
Geometrical representation—জ্যামিতিক প্রতীক বা চিত্র।
Greater—বৃহত্তর।
Identical—অভিন্ন।
Identity—অভেদ।
Inclusion mapping—অবচিত্রণ।
Increasing—ঊর্ধ্বগ।
Infinite—অসীম, অনন্ত।
Infinite set—অসীম সংহতি।
Inner limiting set—আন্তর্পরিণামী সংহতি।
Into mapping—অন্তর্গত চিত্রণ।
Interior point—অন্তস্থ বা অভ্যন্তরীণ বিন্দু।
Integer—পূর্ণ সংখ্যা।
Intersection of two sets—দুটি সংহতির ছেদ।
Inverse mapping—ব্যস্ত চিত্রণ।
Irrational number—অমূলদ রাশি।
Join of two sets—দুটি সংহতির সমন্বয়।
Limit—সীমা।
Limiting point—পরিণাম বিন্দু।
Lower bound—নিম্নাবদ্ধ।

Many-one into mapping—বহু-এক অন্তর্গত চিত্রণ।
Many-one mapping—বহু-এক চিত্রণ।
Many-one onto mapping—বহু-এক সর্বগত চিত্রণ।
Mapping—চিত্রণ।
Monotonic—একান্বয়ী।
Monotonic decreasing—একান্বয়ে নিম্নগ।
Monotonic increasing—একান্বয়ে ঊর্ধ্বগ।
Natural number—অখণ্ড বা স্বাভাবিক সংখ্যা।
Negetive—ঋণাত্মক।
Non-enumerable set—অগণনানুক্রমী সংহতি।
Non-dense set—অঘন সংহতি।
Null set—রিক্ত সংহতি।
One-one correspondence—একৈক প্রতিষঙ্গ।
One-one into mapping—একৈক অন্তর্গত চিত্রণ।
One-one mapping—একৈক চিত্রণ।
One-one onto mapping—একৈক সর্বগত চিত্রণ।
Onto mapping—সর্বগত চিত্রণ।
Open cover—উন্মুক্ত আবরণ।
Ordinary inner limiting set—সাধারণ আন্তর্পারিণামী সংহতি।
Ordinary outer limiting set—সাধারণ বহির্পারিণামী সংহতি।
Origin—মূলবিন্দু।
Outer limiting point—বহির্পারিণামী বিন্দু।
Perfect set—উৎকৃষ্ট সংহতি।
Point—বিন্দু।
Positive—ধনাত্মক।
Positive integer—ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।
Product of two sets—সংহতিদ্বয়ের গুণন।
Proper subset—সঠিক সহ-সংহতি।
Property—ধর্ম, বৈশিষ্ট্য।
Radix fraction—মূলাংক ভগ্নাংশ।
Rational number—মূলদ রাশি।

Real number—বাস্তব রাশি।
Reciprocal—বিপরীত।
Recurring—আবৃত্ত।
Reflexivity—প্রতিবর্তিতা।
Representation—প্রতীক চিত্র।
Rough upper bound—স্থূল ঊর্ধ্বাবদ্ধ।
Rough lower bound—স্থূল নিম্নাবদ্ধ।
Section—বিভাগীকরণ, অবচ্ছেদ।
Sequence—অনুক্রম।
Series—শ্রেণী।
Set—সংহতি।
Set of the first category—প্রথম প্রজাতির সংহতি।
Set of the second category—দ্বিতীয় প্রজাতির সংহতি।
Singleton set—একক সংহতি।
Subfamily—উপ-পরিবার।
Subset—সহ-সংহতি।
Symmetric—প্রতিসম।
Symmetric difference—প্রতিসম ভেদ
Symmetry—প্রতিসাম্য।
Theorem—উপপাদ্য।
Therefore—অতএব।
Transitivity—সংক্রমিতা।
Universal set—সার্বভৌমিক সংহতি।
Upper bound—ঊর্ধ্বাবদ্ধ।
Zero—শূন্য।

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ প্রকাশিত ও প্রকাশিতব্য অন্যান্য বিজ্ঞান পুস্তিকা

দশ টাকা